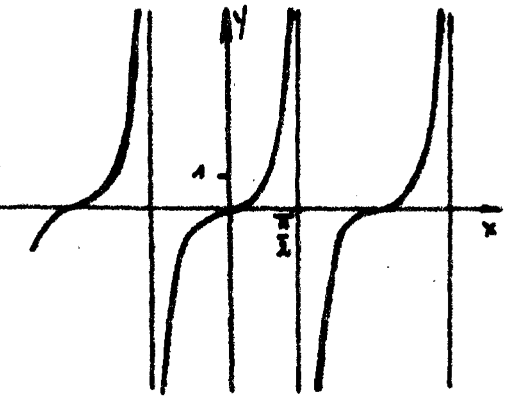
12. ASYMPTOTES 5 h/s , 7 h/s

Nous reprenons l'étude géométrique des fonctions sur base de leurs graphiques. Nous allons nous intéresser davantage à leur comportement à l'infini. Dans le chapitre précédent, on a été amené à introduire un point à l'infini pour toute droite D. Avant cela, l'étude des fonctions nous avait amenés à introduire deux points à l'infini sur D. Ces points de vue ne sont pas contradictoires.

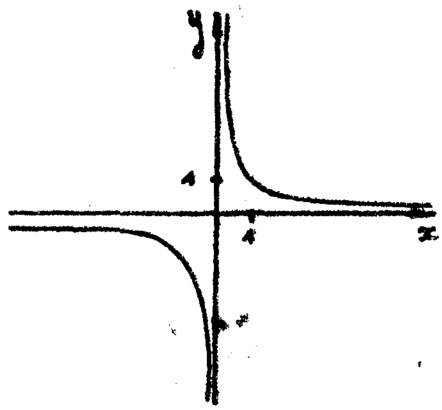
OBSERVATIONS ET GENERALISATIONS

Nous avons observé des asymptotes sur divers graphiques de fonctions comme

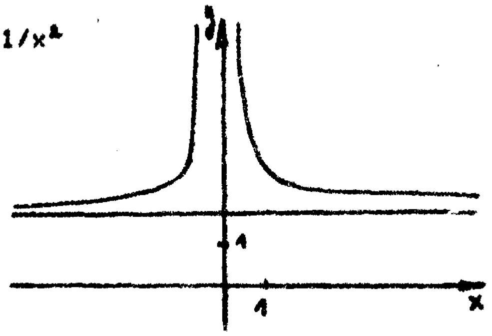
tg x



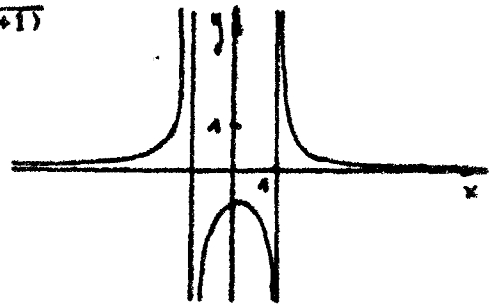
$1/x$



$2 + 1/x^2$



$\frac{1}{(x-1)(x+1)}$



De quoi s'agit-il au juste ? Les asymptotes rencontrées jusqu'ici sont des droites verticales ou horizontales. Les premières apparaissent en un point où la fonction n'est pas définie et où elle a des limites à gauche et à droite qui valent $+\infty$ ou $-\infty$. Les secondes apparaissent quand la fonction a une limite pour x tendant vers $+\infty$ ou vers $-\infty$. L'observation des graphiques suggère que la distance entre une asymptote et la courbe représentative de la fonction tend vers 0 lorsqu'on s'éloigne vers l'infini sur l'asymptote. Explorons cette idée.

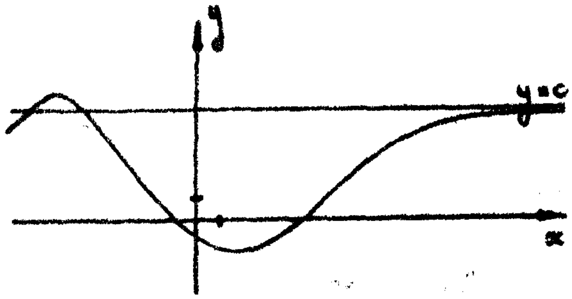
Prenons le cas de l'asymptote horizontale ou A.H.. Soit $y = f(x)$ l'équation de la courbe représentant la fonction et $y = C$ celle de l'A.H.

La distance entre la courbe et l'A.H. s'exprime de manière naturelle par $|f(x) - C|$.

Dire que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = C$

revient bien à dire que

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - C) = 0$$



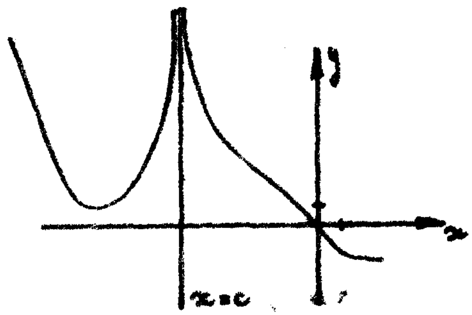
Un raisonnement analogue est valable en $-\infty$. Nous arrivons ainsi à une définition générale :

la droite $y = C$ est appelée asymptote horizontale (ou A.H.) pour $y = f(x)$ si et seulement si

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = C \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = C \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

Et l'asymptote verticale ou A.V. ?

Ici $y = f(x)$ représente la fonction et $x = C$ est l' A.V. .



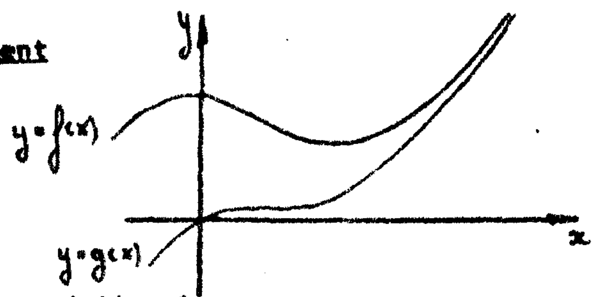
L'intuition du début suggère que si y tend vers $+\infty$, la distance entre la courbe et la droite $x = C$ tend vers 0. Mais l'idée de faire tendre y vers $+\infty$ devrait se baser elle-même sur une variation de x. L'exemple de $1/x$ et d'autres suggèrent que celle-ci se fait à gauche ou à droite.

Dès lors, on pose la définition suivante :

la droite $x = C$, $C \in \mathbb{R}$, est appelée asymptote verticale (ou A.V.) de $y = f(x)$ si $\lim\limits_{x \to C^+} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ ou si $\lim\limits_{x \to C^-} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$.

L'idée des différences de distances suggère une généralisation. Considérons $y = f(x)$ et $y = g(x)$.

On dira que f et g ont le meme comportement asymptotique (en $+\infty$ ou en $-\infty$) ou sont asymptotiques (en $+\infty$ ou en $-\infty$) si

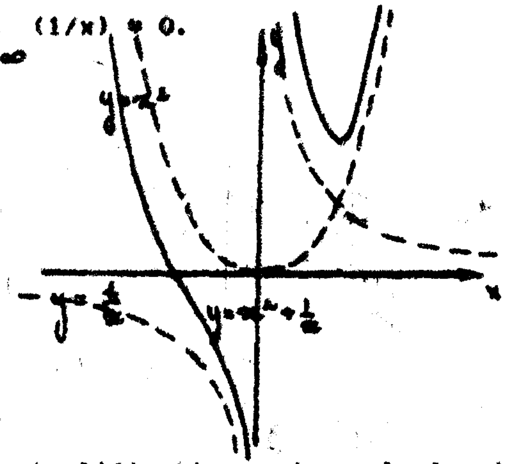


$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = 0 \text{ ou si } \lim_{x \to -\infty} (f(x) - g(x)) = 0$$

Cette notion a souvent un sens alors que $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ x \to -\infty}} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$. En voici un exemple :

x^2 et $x^2 + 1/x$ ont le même comportement asymptotique en $+\infty$ et en $-\infty$ car

$$\lim_{x \to \pm\infty} (x^2 - x^2 - 1/x) = -\lim_{x \to \pm\infty} (1/x) = 0.$$



Cette notion a une grande importance. Sur le dessin, on voit ce qu'elle signifie : les courbes représentatives de x^2 et de $x^2 + 1/x$ collent l'une à l'autre quand x devient assez grand et aussi quand x devient assez petit.

D'autre part, elle correspond au fait que $1/x$ est négligeable au regard de x^2 quand x est assez grand ou assez petit.

Cette idée est d'un usage banal dans des simplifications de calculs trop difficiles, des approximations, etc...

EXERCICES

1. Déterminer les A.H. et les A.V. (s'il y en a) des graphiques de fonctions suivantes. Construire ces graphiques par les méthodes acquises auparavant.

a) $1/(x-a)$ $\quad a \in \mathbb{R}_0^+$ b) $\sqrt{x^2 (x-1)}$ c) $x^2/(x^2+1)$

d) $x^2/(x^2-1)$ e) $x + 2 + 1/x$ f) $(2x^2+3)/(x^2-1)$.

g) $\sqrt{(x-1)/(x+1)}$ h) $2x/(x-1)$ i) $\sqrt{x^2+2x} - x$

2. Comparer les comportements asymptotiques des fonctions suivantes :

a) $1/x$ et $1/x^2$ b) $1/x$ et $1/(x-1)$

c) x et $1/x$ d) x^2 et $x^2 + 3x - 2$

3. Trouver une fonction plus simple qui admet le même comportement asymptotique :

a) $ax^2 + bx + c$ $\quad a,b,c \in \mathbb{R}$ $\quad a \neq 0$

b) $f(x) + 1/x$

c) $f(x) + a/x + b/x^2 + c/x^3$

ASYMPTOTES OBLIQUES

Appliquons les idées sur le comportement asymptotique au cas d'une fonction quelconque $y = f(x)$ et d'un polynôme du premier degré $y = ax + b$.

Comment trouver a et b si $y = f(x)$ est donnée ? Bref, comment trouver les asymptotes obliques ou A.O. de cette fonction ? On se limite au cas où x tend vers $+\infty$. L'hypothèse est que $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - ax - b) = 0$ (1)

Donc

$$\lim_{x \to \infty} (f(x)/x - a - b/x) = 0$$

et

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) / x) - a - 0 = 0$$

Bref, $\boxed{\begin{array}{l} a = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) / x) \\ b = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - ax) \end{array}}$ et alors (1) montre que

On procède de même pour une A.O. en x tendant vers $-\infty$.

Il est à noter que dans la recherche d'une asymptote du type $y = ax + b$, l'existence de a n'implique pas l'existence de b. Le contre-exemple suivant montre la véracité de cette affirmation.

Considérons la fonction $y = \sin x$. Nous avons $a = \lim\limits_{x \to \infty} (\sin x / x) = 0$ mais $b = \lim\limits_{x \to \infty} (\sin x - 0x)$ n'existe pas.

EXERCICES

4. Le graphique d'une fonction peut-il admettre à la fois une A.H. et une A.O., une A.O. et une A.V., une A.H. et une A.V. ?

5. Rechercher les asymptotes des fonctions suivantes :

a) $x^2 /(x-1)$

b) $\sqrt{x^2 + 1}$

c) $\sqrt[3]{x^3 + 3x^2}$

d) $(3x^2 - 2)/(x-1)$

e) $x - 1 + x/(x^2 + 1)$

f) $(x^3 - 1) / (9x^2 - 25)$

g) $\sqrt{x^2 + 2x} - x$ (voir ex. 1-i)

h) $\sqrt{(1-x^4)/x^2}$

i) $\sqrt{(x^4 -1)/x^2}$

j) $2x^2 /(x^2 - 5x + 6)$

k) $(3 - 4x + x^2) / (2x + 3)$

l) $2x + \sqrt{4x^2 - 9}$

m) $\sqrt{(x - 1)^3 / x}$

n) $x + 2 + 1/x$ (voir ex.1-e)

6. Déterminer a et b pour que le graphique de la fonction $y = ax + b / (x + c)^2$ admette une asymptote parallèle à la droite d'équation $y = x - 1$, admette pour A.V. la droite d'équation $x = 1$ et comprenne le point (0,4).

7. Paraboles asymptotiques

a) Montrer que si $y = f(x)$ et $y = ax^2 + bx + c$ ont le même comportement asymptotique en $+\infty$, alors

$a = \lim_{x \to \infty} f(x) / x^2$ $\qquad$ $b = \lim_{x \to +\infty} ((f(x) / x) - ax)$

et $\quad c = \lim_{x \to \infty} (f(x) - ax^2 - bx)$

b) Appliquer ce résultat aux fonctions suivantes et à leur représentation graphique:

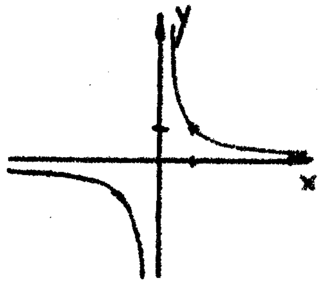
$(x^2 + 3x + 1)(2x + 1)/(x - 5)$

$(ax^2 + bx + c)(dx + e)/(fx + g) \qquad a \neq 0$

ASYMPTOTES ET TANGENTES A L' INFINI

Revenons à l'idée qu'une droite admet un seul point à l'infini.

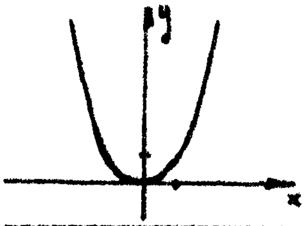
Exemple 1 : Examinons l'hyperbole H d'équation $y = 1/x$ ou $xy = 1$.



En tout point la courbe admet <u>une</u> tangente. Examinons les droites qui coupent H en un seul point. Outre les tangentes, on obtient les droites $x = C$ ($C \neq 0$) et $y = C$ ($C \neq 0$). On est amené à penser qu'il serait judicieux de compléter H en $\overline{H}$, par l'adjonction de deux points à l'infini, l'un sur les droites $x = C$ et l'autre sur les droites $y = C$.

Dès lors, les asymptotes apparaissent comme les tangentes à H en les points à l'infini. De plus, les droites coupant H en un seul point sont exactement les tangentes et les asymptotes. Bref, H ressemble fortement à un cercle qui se serait aventuré à posséder deux points à l'infini.

Exemple 2 : Examinons la parabole P d'equation $y = x^2$. Elle n'a pas d'asymptote.



En revanche, les droites qui coupent P en un seul point sont les tangentes ou les droites $x = C$.
Celles-ci amènent à compléter P en $\overline{P}$ par le point à l'infini des droites $x = C$. Dès lors, la tangente à P au point à l'infini est la droite à l'infini et les seules droites qui coupent P en un seul point sont les tangentes.

RESUME

Asymptote horizontale

La droite $y = c$ ($c \in \mathbb{R}$) est appelée A.H. pour $y = f(x)$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = c$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = c$

Asymptote verticale

La droite $x = c$ ($c \in \mathbb{R}$) est appelée A.V. pour $y = f(x)$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ ou $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$

Asymptote oblique

La droite $y = ax + b$ ($a,b \in \mathbb{R}$) est appelée A.O. pour $y = f(x)$ si et seulement si

$$a = \lim_{x \to \infty} (f(x) / x) \quad \text{et} \quad b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - ax)$$

ou

$$a = \lim_{x \to -\infty} (f(x) / x) \quad \text{et} \quad b = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - ax)$$