9. FONCTIONS CONTINUES

7 h/s., 5 h/s., 3 h/s.

UNE MISE AU POINT

L'idée de fonction continue nous a guidés souvent sans que nous nous en rendions compte. Après avoir dessiné un graphique point par point, nous relions les points obtenus en pariant en quelque sorte sur une certaine continuité.

Au chapitre 5, dans l'exemple 1, la pente d'une sécante est $\frac{x^2 - a^2}{x - a} = x + a$ pour $x \neq a$ et lorsque x tend vers a, nous admettons que cette expression tend vers 2a. Au fond, nous admettons alors une propriété telle que

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

C'est à ce type de propriété que nous nous intéressons à présent.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie sur un intervalle I et $p \in$ I. On dit que f est <u>continue en p</u> si $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$.

Il convient de noter que cette condition n'est pas automatique. La fonction (3) du début du chapitre 7 en offre un exemple. En revanche, nous allons voir progressivement que la plupart des fonctions élémentaires définies au chapitre 3 sont continues en tout point de leur domaine de définition.

Notons aussi que la définition de la continuité en p exprime une condition locale, une propriété en un point, alors que notre première idée, à savoir relier des points, était globale.

L'exemple de la pente de la sécante égale à $\frac{x^2 - a^2}{x - a}$ montre bien que nous avons besoin de la notion locale.

<u>Exemple :</u> la fonction f: $x \to ax + b$ est continue en tout $p \in \mathbb{R}$.

Pour tout voisinage de f(p), soit $V =]ap+b-\varepsilon\ ,\ ap+b+\varepsilon[$ où $\varepsilon \in \mathbb{R}_0^+$, on doit construire un voisinage U de p tel que $f(U) \subseteq V$.

Si $a > 0$, $U =]p - \frac{\varepsilon}{a}, p + \frac{\varepsilon}{a}[$ a la propriété requise car

$$p - \frac{\varepsilon}{a} \leqslant x \leqslant p + \frac{\varepsilon}{a} \quad \text{implique}$$

$$ap + b - \varepsilon \leqslant ax + b \leqslant ap + b + \varepsilon$$

Si $a < 0$, $U =]p + \frac{\varepsilon}{a}, p - \frac{\varepsilon}{a}[$ convient car

$$p + \frac{\varepsilon}{a} \leqslant x \leqslant p - \frac{\varepsilon}{a} \quad \text{implique}$$

$$ap + b - \varepsilon \leqslant ax + b \leqslant ap + b + \varepsilon$$

Si $a = 0$, tout voisinage de p convient.

==

EXERCICES

1. Montrez que les fonctions suivantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont continues en tout point de leur domaine de définition:

a) $x \longrightarrow |x|$ b) $x \longrightarrow x^2$ c) $x \longrightarrow \sin x$

d) $x \longrightarrow \cos x$ e) $x \longrightarrow \operatorname{tg} x$ (pour c,d,e voir exercice 18 du chapitre 7)

2. **Théorème 1: soient f et g des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies sur un intervalle I et continues en $p \in I$. Alors f+g, f-g, fg sont continues en p et f/g est continue en p si $g(p) \neq 0$.** Démontrez.

3. **Théorème 2: soient f et g des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies sur des intervalles I_1 et I_2 avec $I_2 \supseteq f(I_1)$. Soit $p \in I_1$, f continue en p et g continue en f(p). Alors $g \circ f$ est continue en p et définie sur I_1.** Démontrez.

4. Définir une fonction continue à gauche en p et continue à droite en p.

===

LE THEOREME DES VALEURS INTERMEDIAIRES

Grâce aux résultats acquis dans la section précédente, nous justifions la continuité des fonctions élémentaires qui ne font pas intervenir la fonction E(x) à deux chaînons près: nous n'avons pas montré que si f est continue sur I et si f^{-1} existe, alors f^{-1} est continue et nous n'avons pas montré que l'exponentiation est continue.

Pour f^{-1}, cette preuve repose sur le théorème des valeurs intermédiaires que nous énonçons à présent et dont la démonstration sort du cadre de ce cours parce qu'elle fait appel à des développements plus approfondis sur la compacité des intervalles fermés de $\mathbb{R}$.

Théorème 3 (des valeurs intermédiaires) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue sur un intervalle fermé $[a,b]$. Alors f prend, au moins une fois, chaque valeur comprise entre f(a) et f(b).

C'est un théorème que nous avons utilisé un peu à la légère, depuis de nombreuses années, avant même de connaître la continuité. Ainsi, si $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$, nous l'avons utilisé pour admettre l'existence d'un $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = 0$.

Nous admettons un autre résultat, pour des raisons analogues. Celui-ci renforce le théorème 3.

Théorème 4 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue sur l'intervalle fermé $[a,b]$. Alors $f([a,b])$ est un intervalle fermé. En particulier, f possède une plus grande valeur ou maximum M et une plus petite valeur ou minimum m.

A présent, nous pouvons nous attaquer à la continuité de f^{-1} (lorsque cette réciproque existe), au travers d'une série de propriétés.

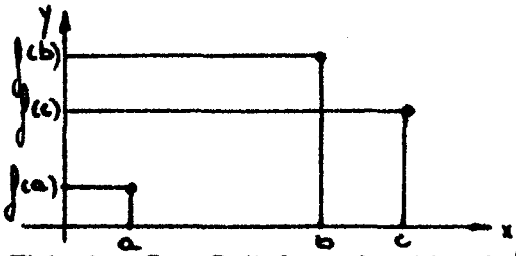
Théorème 5 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ strictement croissante sur un intervalle I. Alors f^{-1} existe et est strictement croissante sur f(I).

De même, si f est strictement décroissante sur I, f^{-1} existe et est strictement décroissante.

<u>Démonstration:</u> on peut se borner au cas où f est strictement croissante. Pour tout $y \in f(I)$, il existe un seul $x \in I$ tel que $f(x)=y$. Donc f^{-1} existe. Soit $x_1 < x_2$ dans f(I). Il existe y_1 et y_2 dans I tel que $f(y_1) = x_1$ et $f(y_2) = x_2$. Si $y_1 \geqslant y_2$ on a $f(y_1) \geqslant f(y_2)$ car f est strictement croissante sur I, donc $x_1 \geqslant x_2$, une contradiction! Il en résulte que $y_1 < y_2$ et de ce fait $f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2)$. Donc f^{-1} est strictement croissante.

<u>Théorème 6:</u> Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue sur un intervalle I et possédant une réciproque.
Alors f est strictement croissante ou strictement décroissante.

<u>Démonstration :</u> on peut supposer que $a < b$ dans I et que $f(a) < f(b)$, car le cas où $f(a) > f(b)$ se règlerait de manière symétrique.
Il faut prouver que f est strictement croissante.



Si $b < c$ dans I et si $f(c) < f(b)$, il existe un élément u dans $[f(a),f(b)[\cap [f(c),f(b)[$ et par le théorème 3, f prend la valeur u sur [a,b] et la valeur u sur [b,c] ce qui contredit l'existence de f^{-1}. On traite de même le cas où $c < b$. Comme b est un élément arbitraire de I, on en déduit que f est strictement croissante.

<u>Théorème 7:</u> Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un intervalle I, telle que f(I) est un intervalle pour tout intervalle J inclus à I.
Si f est strictement croissante (ou strictement décroissante), f est continue sur I, f possède une réciproque et f^{-1} est continue sur l'intervalle f(I).

<u>Démonstration:</u> Par le théorème 5, f^{-1} existe et est strictement croissante sur l'intervalle f(I). Prouvons que f^{-1} est continue.
Soit $p \in f(I)$ et V un voisinage ouvert de $f^{-1}(p)$. Il faut trouver un voisinage U de p tel que $f^{-1}(U) \subsetneq V$. Il suffit de prendre $U = f(V \cap I)$ qui est un intervalle par hypothèse. De ce fait, U contient un voisinage de p et l'image de celui-ci par f^{-1} est dans V. Donc f^{-1} est continue.
Par le théorème 6, f^{-1} est strictement croissante. Par le théorème 3, $f^{-1}(J)$ est un intervalle pour tout intervalle J inclus à f(I) donc f^{-1} vérifie les hypothèses du théorème 7 et par la première partie de la démonstration $(f^{-1})^{-1} = f$ est continue sur $f^{-1}(f(I)) = I$.

==

<u>EXERCICES</u>

5. Montrez par un contre-exemple que <u>chaque</u> hypothèse est nécessaire dans les théorèmes 3 à 7.

6. Complétez la démonstration du théorème 6, en détaillant le cas où $c \leqslant b$.

7. Si a est un réel positif, montrez que $x \to x^a$ est continue.

==

CONCLUSION POUR LES FONCTIONS ELEMENTAIRES

Grâce à l'exercice 7, l'exponentiation est continue (il faudrait s'occuper encore de $x \to a^x$ pour être complet).

On sait déjà que les fonctions x, $|x|$, $\cos x$ sont continues. En appliquant encore les théorèmes ci-dessus, on arrive au résultat suivant :

toute fonction élémentaire qui ne fait pas intervenir $E(x)$ est continue en tout point d'un intervalle où elle est définie.

CONTINUITE ET DERIVABILITE

Théorème 8 **soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en $p \in I$. Alors f est continue en p.**

Démonstration:

On a $\quad f'(p) = \lim\limits_{a \to 0} \dfrac{f(p+a) - f(p)}{a}$ $\quad$ et

$$f(p+a) = f(p+a) - f(p) + f(p)$$

$$= \frac{f(p+a) - f(p)}{a}(a) + f(p) \qquad \text{pour } a \neq 0$$

Donc

$$\lim_{a \to 0} f(p+a) = \lim_{a \to 0} \frac{f(p+a) - f(p)}{a} \cdot \lim_{a \to 0}(a) + \lim_{a \to 0} f(p)$$

$$= f'(p).0 + f(p) = f(p)$$

Alors, pour tout voisinage V de $f(p)$, il existe un voisinage U de o tel que $f(p+U) \subseteq V$. De ce fait, $p+U$ est un voisinage de p dont l'image par f est dans V et ceci force $\lim\limits_{x \to p} f(x) = f(p)$.

===

EXERCICES

8. Si f est une fonction définie sur un intervalle I avec $p \in I$ et si $\lim\limits_{a \to 0} f(p+a) = \ell$, montrez que $\lim\limits_{x \to p} f(x) = \ell$.

Réciproquement, si $\lim\limits_{x \to p} f(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{a \to 0} f(p+a) = \ell$.

9. Montrez que la réciproque du théorème 8 est fausse.

10. Voici une démonstration fausse du théorème 8. Trouvez l'erreur.

On a

$$f'(p) = \lim_{a \to 0} \frac{f(p+a) - f(p)}{a}$$

Or, si a tend vers 0, il faut que $\lim\limits_{a \to 0} (f(p+a) - f(p)) = 0$ sinon $f'(p)$ serait infini. Donc $\lim\limits_{a \to 0} f(p+a) = f(p)$.

===

RESUME

Fonctions continues

Définition: soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie sur un intervalle I et $p \in I$; f est continue en p si $\lim_{p} f(x) = f(p)$.

Théorème 1 soient f et g des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies sur un intervalle I et continues en $p \in I$. Alors f+g, f-g, fg sont continues en p et f/g est continue en p si $g(p) \neq 0$.

Théorème 2 soient f et g des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies sur des intervalles I_1 et I_2 avec $I_2 \supseteq f(I_1)$. Soit $p \in I_1$, f continue en p et g continue en f(p). Alors $g \circ f$ est continue en p et définie sur I_1.

Théorème 3 soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue sur un intervalle fermé $[a,b]$. Alors f prend, au moins une fois, chaque valeur comprise entre f(a) et f(b).

Théorème 4 soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue sur l'intervalle fermé $[a,b]$. Alors $f([a,b])$ est un intervalle fermé. En particulier, f possède une plus grande valeur ou maximum M et une plus petite valeur ou minimum m.

Théorème 5 soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ strictement croissante sur un intervalle I. Alors f^{-1} existe et est strictement croissante sur f(I). De même, si f est strictement décroissante sur I, f^{-1} existe et est strictement décroissante.

Théorème 6 soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue sur un intervalle I et possèdant une réciproque. Alors f est strictement croissante ou strictement décroisssante.

Théorème 7 soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un intervalle I, telle que f(I) est un intervalle pour tout intervalle J inclus à I. Si f est strictement croissante (ou strictement décroissante), f est continue sur I, possède une réciproque et f^{-1} est continue sur l'intervalle f(I).

Théorème 8 soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en $p \in I$. Alors f est continue en p.