8. ORIENTATION

hors programme

Rappels : VM3, chapitre 6; VM4, chapitre 8.

GAUCHE, DROITE

Certaines figures de l'espace E^3 se présentent sous deux formes isométriques mais non superposables par déplacement, comme une main gauche et une main droite. C'est le cas des molécules extrêmement complexes rencontrées en biologie, comme l'A.D.N. et les protéines. C'est le cas des chromosomes et des gènes et parfois, de molécules beaucoup plus simples mises en évidence par Pasteur dès le 19e siècle. D'autres figures, notamment les plus courantes en géométrie n'ont pas cette particularité.

Nous dirons qu'une figure F de E^3 est <u>orientée</u> s'il existe une image de F par une isométrie i(F) qui n'est pas superposable à F par un déplacement. Si au contraire, toute image isométrique i(F) est superposable à F par un déplacement, nous dirons que F est <u>non orientée</u>.

==

EXERCICES

1. a) Passez en revue des figures connues et décidez si elles sont orientées ou non orientées (exemples: sphère, cylindre, plan, hélice, pyramide oblique, cylindre oblique, parallélipipède à côtés non perpendiculaires, modèles des polyèdres, modèles de molécules).
b) Décrire 5 figures orientées n'apparaissant pas dans la liste précédente.
c) Apportez en classe des figures orientées et une de leurs images isométriques non superposables par déplacement.
d) Construire des modèles de figures orientées.

2. a) A votre avis, quelle est la situation la plus fréquente pour une figure de l'espace: être orientée ou être non orientée ?
b) Et qu'en est-il pour les objets fabriqués par l'homme ?
c) Le corps humain est-il orienté ou non-orienté ?

3. Une figure F est constituée par A $\cup$ B où A est une figure orientée et B est l'image de A par une symétrie orthogonale. La figure F est-elle orientée ?

==

COMPRENDRE LA GAUCHE ET LA DROITE

Considérons deux figures F et F' isométriques mais non superposables par déplacement. Nous dirons alors qu'elles ont <u>une orientation différente</u>. Si G est une figure isométrique à F peut-on affirmer que G est superposable à F ou à F' par un déplacement ?

On a F'= r(F) où r est un retournement. On a G= i(F) où i est une isométrie. Comment passe-t-on de F' à G ? Par

$i \circ r^{-1}$ tout simplement.

Si i est un retournement, F' est superposable à G et si i est un déplacement, F est superposable à G. Nous avons démontré le

THEOREME: si F est une figure orientée, les figures isométriques à F se répartissent en deux ensembles disjoints $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}'$:
toutes les figures appartenant à $\mathfrak{F}$ sont superposables entre elles par déplacement, de même que celles appartenant à $\mathfrak{F}'$. Toute figure de $\mathfrak{F}$ est applicable sur une figure de $\mathfrak{F}'$ par un retournement.

Ceci explique le phénomène constitué par l'existence de mains gauches et de mains droites. Nous pouvons décider que les membres de $\mathfrak{F}$ sont appelés <u>gauches</u> et les membres de $\mathfrak{F}'$, <u>droits</u>, ou le contraire.

Il faut bien comprendre que les figures gauches et les figures droites ont les mêmes propriétés intrinsèques. Ce sont les couples de figures qui sont différenciés par le caractère gauche ou droit. La structure du corps humain est largement, mais non totalement, non orientée. Ceci explique nos difficultés à distinguer entre la gauche et la droite.

Il existe des molécules qui se présentent sous une forme gauche et une forme droite. Cette particularité joue un grand rôle dans l'industrie pharmaceutique. La forme gauche peut parfois être produite par le corps humain sans que la forme droite le soit. Mais celle-ci peut s'avérer efficace comme médicament. Si on tient compte de sa structure chimique profonde, le corps humain est donc orienté sans discussion possible.

EXERCICES

4. Que devient le théorème ci-dessus pour une figure non orientée? Enoncez-le correctement et démontrez-le.

5. Construire des modèles de molécules à base de carbone et d'hydrogène qui sont orientées. Enquêtez quant à la présence de deux formes, gauche et droite, de ces molécules dans les organismes vivants.

6. Examinez
   a) une boîte de vis. Ont-elles la même orientation ?
   b) une boîte de pâtes torsadées. Ont-elles la même orientation ?
   c) des coquillages (à peu près) isométriques.
   d) une autre collection de figures isométriques rencontrées dans le monde vivant.

POUR RECONNAITRE QU'UNE FIGURE EST ORIENTEE

La définition que nous avons adoptée pour les figures orientées présente un gros inconvénient. Pour décider que F est non orientée, il faut en principe comparer F à toute image isométrique de F et comme le nombre de ces images est généralement infini, cela présente une certaine difficulté. Ne peut-on vérifier que F est orientée ou non orientée sans devoir passer en revue toutes ses images isométriques ?

Voici une réponse à cette question:

THEOREME : a) une figure F est orientée si et seulement si toute isométrie conservant F est un déplacement.

b) une figure F est non orientée si et seulement si il existe un retournement conservant F.

Démonstration : un petit rappel de logique sera utile.

Si p et q désignent des propriétés et $\bar{p}$, $\bar{q}$ leurs négations, on sait que

1) $p \Rightarrow q$ est équivalent à $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$

2) p et $\bar{p}$ ne peuvent pas être simultanément vrais.

Une démonstration appliquant 1) est une démonstration par contraposition. Une démonstration appliquant 2) est une démonstration par l'absurde.

Soit p la propriété " F est orientée " et

q la propriété " toute isométrie conservant F est un déplacement ".

On voit que a) affirme $p \Leftrightarrow q$ et b) affirme $\bar{p} \Leftrightarrow \bar{q}$.

Grâce à 1), il suffit d'établir a).

Prouvons d'abord que $p \Rightarrow q$. On suppose donc que F est orientée. Il faut prouver qu'une isométrie i conservant F est nécessairement un déplacement. Nous procédons par l'absurde en supposant que i est un retournement. Comme F est orientée, il existe une figure F' isométrique à F et d'orientation différente. Donc il existe un retournement r tel que F'= r(F). Dès lors, r o i est un produit de deux retournements, c'est-à-dire un déplacement qui transforme F en F'. Ceci est une contradiction car F,F' ont une orientation différente. Donc i est un déplacement. On a bien $p \Rightarrow q$.

Prouvons que $q \Rightarrow p$. On suppose donc que toute isométrie conservant F est un déplacement. Soit r un retournement de l'espace et F'=r(F). Nous voulons prouver que F et F' ont une orientation différente. Procédons à nouveau par l'absurde, en supposant qu'il existe un déplacement d tel que d(F)=F'. Alors $d^{-1} \circ r$ est un retournement qui conserve F, contrairement à l'hypothèse initiale et ceci est une contradiction. On a bien $q \Rightarrow p$.

EXERCICES

7. Utilisez le théorème précédent pour déterminer

a) les parallélipipèdes qui sont non orientés;

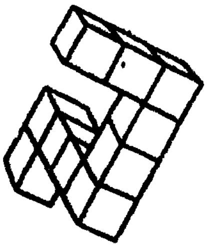
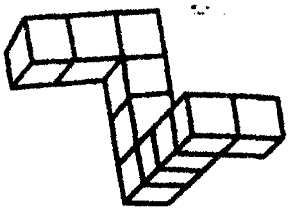
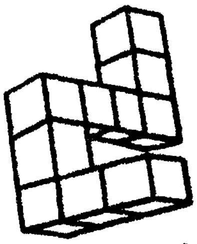
b) les pyramides qui sont non orientées;

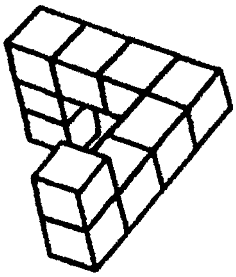
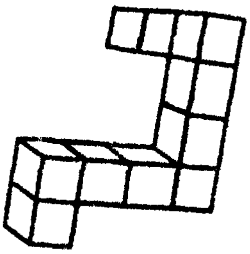
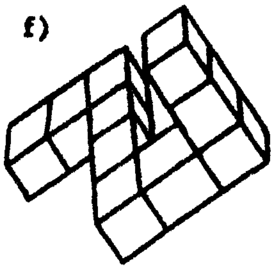
c) les cylindres circulaires illimités qui sont non orientés;

d) les figures planes qui sont non orientées;

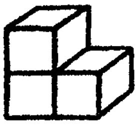
8. Considérer une collection de modèles de polyèdres et d'autres corps solides et les répartir rapidement en deux collections selon qu'ils sont orientés ou non.

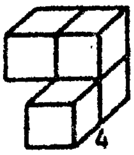
9. Quels sont, parmi les corps solides suivants, ceux qui ont la même orientation :

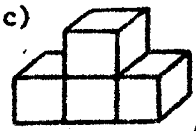
a) 
b) 
c) 

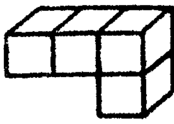
d) 
e) 
f) 

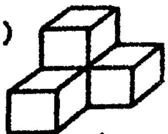
10. Les corps solides que voici sont-ils orientés ou non orientés ? (lorsqu'il s'agit d'un assemblage de cubes, le nombre de cubes qui le composent est indiqué à côté du dessin pour éviter tout ambiguïté)

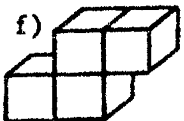
a) 
3

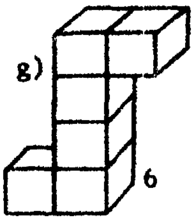
b) 
4

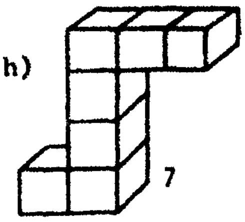
c) 
4

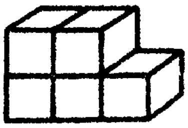
d) 
4

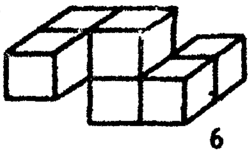
e) 
4

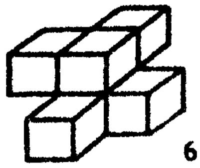
f) 
4

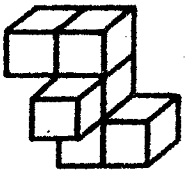
g) 
6

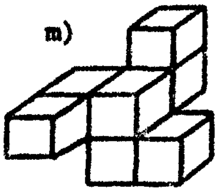
h) 
7

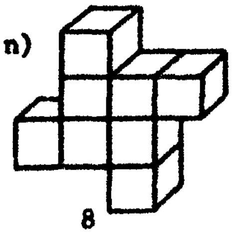
i) 
5

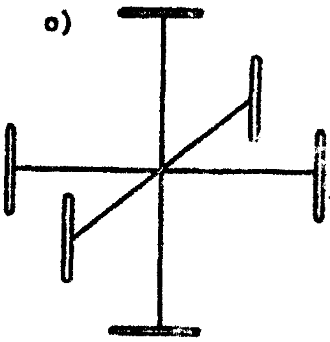
j) 
6

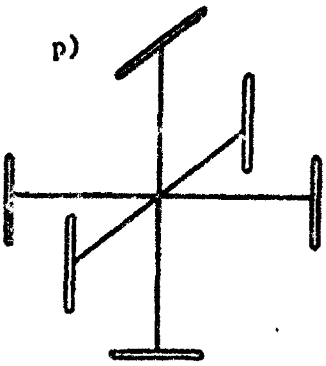
k) 
6

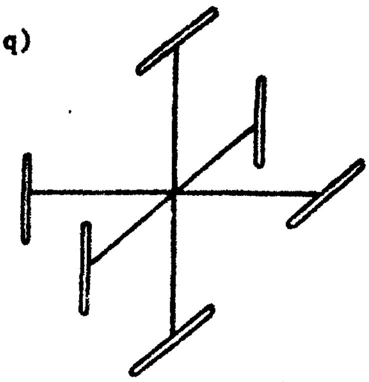
l) 
6

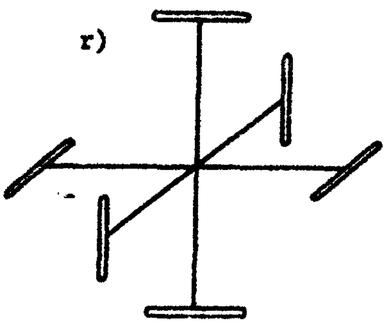
m) 
7

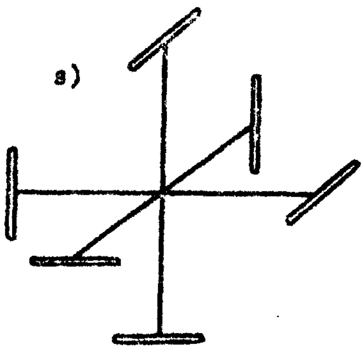
n) 
8

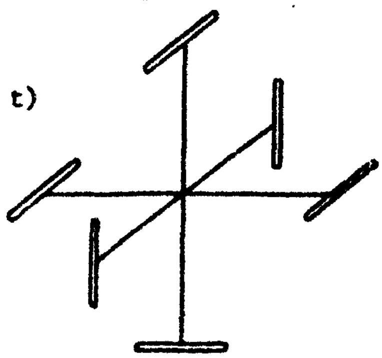
o) 

p) 

q) 

r) 

s) 

t) 

ORIENTER UNE FIGURE NON ORIENTEE

Considérons une figure F qui est non orientée, par exemple un plan, une sphère, un cylindre circulaire illimité, un cube, une droite, un point.

Soit Dép(F) le groupe des déplacements conservant F et Iso(F), le groupe des isométries conservant F. Nous savons qu'il existe au moins un retournement conservant F et par conséquent Iso(F) se décompose en deux parties non vides et disjointes: Dép(F) et Ret(F) (les retournements). Ces deux ensembles permettent de concevoir une théorie de l'orientation sur F analogue à celle élaborée pour l'espace. Voici des exemples.

__Exemple 1:__ F est une droite. Cette fois, la droite joue le rôle de l'espace. Nous observons des

<u>figures orientées</u>	<u>figures non orientées</u>
demi-droite fermée	point
demi-droite ouverte	segment fermé
vecteur non nul	segment ouvert
translation	symétrie centrée
graduation	échelle (graduation dont on oublie l'origine et l'unité)

__Exemple 2:__ F est un plan et joue le rôle de l'espace

<u>figures orientées</u>	<u>figures non orientées</u>
triangle non isocèle	demi-droite (fermée ou ouverte)
parallélogramme autre que rectangle et losange	vecteur non nul
cercle muni d'un sens de parcours (cercle orienté)	translation
angle orienté	triangle isocèle
	rectangle, losange
	cerf-volant
	cercle
	angle
	demi-plan

> __Synthèse__
>
> Si F est un espace dont les isométries se répartissent en déplacements et en retournements, nous résumons les propriétés de ces transformations en disant que les déplacements conservent l'orientation de (dans) F et que les retournements modifient l'orientation de (dans) F.

===

__EXERCICES__

11. Dressez une liste de figures orientées et non orientées dans l'espace F si
   a) F est une sphère;
   b) F est un cylindre circulaire droit illimité;
   c) F est un cube.

12. Voici une symétrie centrale s de $\mathbb{E}^3$ de centre o. Alors

a) s conserve-change l'orientation de E^3.
b) s conserve-change l'orientation d'un plan passant par o.
c) s conserve-change l'orientation d'une droite passant par o.
d) s conserve-change l'orientation d'une sphère de centre o.
e) s conserve-change l'orientation d'un carré de centre o

(biffer la mention inexacte)

13. Etudiez une théorie de l'orientation basée sur les similitudes. A cette fin, il convient de distinguer des similitudes "positives" et des similitudes "négatives". Comment peut-on envisager de définir ces notions ?

==