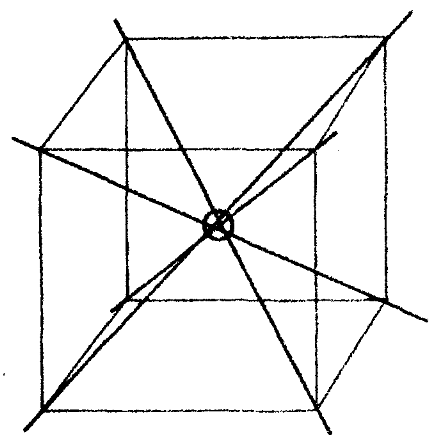
8. SYNTHESE SUR LES TRANSFORMATIONS . 6h/s

Supposé acquis . Large expérience avec les déplacements, retournements, homothéties et similitudes de la droite, du plan et de l'espace (VM3, chapitres 4, 6, 10, 13) .

Objectifs . Aisance accrue dans le maniement des isométries . Tableau des sous-espaces invariants et des directions de sous-espaces invariantes par une isométrie . Reprise des similitudes . Introduction des notions d'orbite et de stabilisateur .

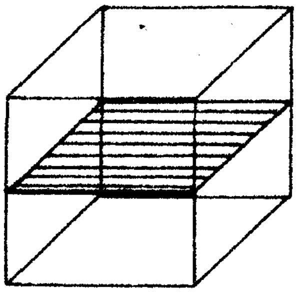
LES ISOMETRIES DU CUBE .

Pour reprendre contact avec les transformations les plus familières et poursuivre le développement de la vision spatiale, nous décidons d'étudier les symétries ou les isométries conservant le cube .
Il nous paraît essentiel que les élèves disposent d'un modèle de cube par groupe de deux . Nous progressons par une série de questions que les élèves examinent .
Le cube a-t-il un ou plusieurs centres de symétrie ?
Il en a un . C'est l'intersection des grandes diagonales du cube, au nombre de quatre . Après l'observation sur le modèle, nous passons à un dessin en perspective . Si celui-ci est trop imprécis, les diagonales ne se coupent pas forcément sur le dessin . Il convient de dessiner un cube transparent ou réalisé en fil de fer afin que tous les sommets ou arêtes apparaissent sur le dessin .

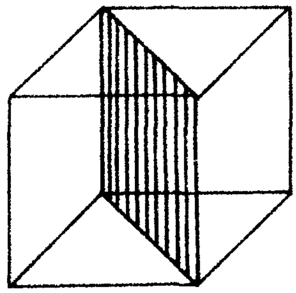


les grandes diagonales du cube

Une perspective cavalière offre un inconvénient : deux grandes diagonales se superposent et coïncident avec deux arêtes .
Le cube C a-t-il des plans de symétries ? Il y en a trois qui recoupent chacun 4 arêtes parallèles en leur milieu (plans médians) et six passant par deux arêtes opposées (plans diagonaux) . Nous dessinons un représentant de chacun de ces types de plans . (voir page suivante)
Les symétries centrées et bilatérales sont-elles des rotations ou des retournements de l'espace ? Chacun est convaincu que les symétries bilatérales sont des retournements, en examinant une main gauche et une main droite dans des positions symétriques .
Pour symétrie centrée il faut davantage de contorsions pour



un plan de symétrie
médian

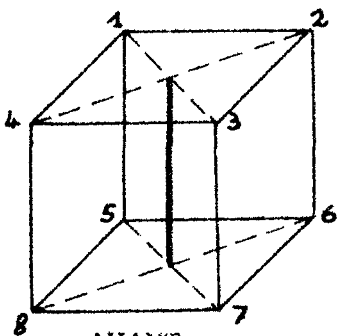


un plan de symétrie
diagonal

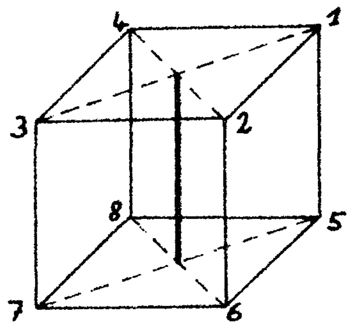
faire apparaître qu'il s'agit aussi d'un retournement . Ceci étant acquis, le professeur propose de rechercher des rotations conservant le cube C .

Les élèves découvrent des rotations de 90° autour de trois axes joignant les centres des faces opposées, qu'on appelle des <u>axes d'ordre 4</u> parce qu'il est possible d'effectuer 4 rotations conservant C dont l'axe est l'une de ces droites .

Le dessin d'une telle rotation pose un problème car l'axe seul ne détermine pas celle-ci . C'est le moment choisi par le professeur pour introduire une nouvelle technique . On attribe des lettres ou numéros aux sommets et on dessine deux cubes : l'un où les points occupent leur position AVANT la rotation et l'autre APRES la rotation . Voici un exemple .



AVANT



APRES

Cette technique est malheureusement fort lourde . Le professeur propose bientôt de dessiner un seul cube, de numéroter ses sommets et d'indiquer la rotation décrite ci-dessus par

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

où l'on voit que 1 est transformé en 2, 2 en 3, etc.

Une notation encore plus condensée est

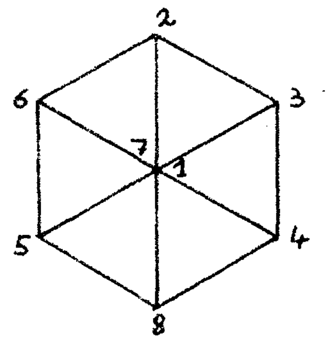
$$(1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8)$$

qui indique que 1 va en 2, 2 en 3, 3 en 4 et 4 revient en 1,

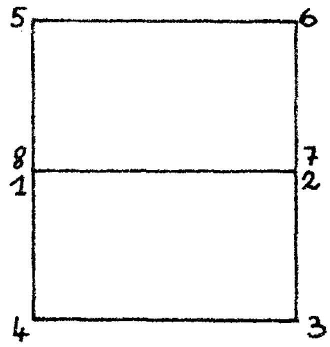
5 allant en 6, 6 en 7, 7 en 8 et 8 revenant en 5 .
Munis de ces techniques, nous reprenons notre exploration . Combien de rotations autour d'axes d'ordre 4 avons-nous récoltées ?

Six rotations d'un quart de tour
Trois rotations d'un demi tour
Une rotation identique .

Le cube C admet-il d'autres rotations ? En posant un modèle sur un sommet, avec une grande diagonale en position verticale, bref en imitant l'Atomium, on voit apparaître des rotations d'un tiers de tour . Les grandes diagonales sont des axes d'ordre 3 . Voici l'une de ces rotations : (1)(2, 5, 4)(3, 6, 8)(7) et un dessin de ce cube vu de très haut .
On obtient 8 rotations d'un tiers de tour conservant C .



En dressant C sur une de ses arêtes, on découvre de même un axe d'ordre 2 et un total de six rotations d'un demi-tour conservant C et admettant un axe d'ordre 2 .
Voici l'une d'elles :
(1, 2)(3, 5)(4, 6)(7, 8)
et une vue de ce cube, prise à grande altitude .



Nous dénombrons 24 rotations conservant le cube et seulement 10 retournements .
Il y a là un déséquilibre anormal .
Nous demandons de composer la symétrie centrée s avec les 24 rotations obtenues . On obtient ainsi 24 retournements comprenant les 10 du début mais aussi 6 antirotations conservant un axe d'ordre 4, comme (1, 8, 3, 6)(2, 5, 4, 7) et 8 antirotations conservant un axe d'ordre 3, comme (1, 7)(2, 3, 4, 8, 5, 6) .
Nous obtenons 48 isométries conservant le cube . La liste est-elle complète ? Peut-être . Comment le prouver ?

EXERCICES . 1. Colorier les sommets d'un cube avec deux couleurs de telle manière que deux sommets d'une même arête aient toujours des couleurs différentes . Est-ce possible ? Quelles sont les figures obtenues ? Peut-on résoudre le même problème pour tous les polyèdres ?

2. Si T est un tétraèdre régulier montrer qu'il existe un et un seul cube admettant les sommets de T parmi ses sommets . En déduire que le groupe des isométries conservant T est un sous-groupe du groupe des isométries conservant un cube .

3. Se servir des exercices 1 et 2 pour faire l'inventaire complet des 24 isométries conservant un tétraèdre régulier T.

LES ISOMETRIES ET LEURS SOUS-ESPACES ET DIRECTIONS INVARIANTES .

Soit E l'un des espaces E^1, E^2, E^3 . Dans VM3, nous avons fait l'inventaire complet du groupe des isométries de E . Nous récapitulons tous les types d'isométries et nous dressons une liste des sous-espaces invariants et des directions de sous-espaces envariantes, en excluant toutefois le cas banal de l'espace tout entier et du sous-espace vide . Pour obtenir un tableau synthétique qui montre que les noms des transformations sont inspirés par leurs invariants, nous introduisons les notations qui suivent :

- i est une isométrie
- f est un point fixe de i
- F est un droite invariante de i
- $\mathcal{F}$ est une direction de droites invariante par i
- φ est un plan invariant de i
- Φ est une direction de plans invariante par i

Bien entendu, f, F, $\mathcal{F}$ etc. n'existent pas pour tout i .

Nous posons :

- i = 1 si i est l'identité
- i = t si i est une translation non identique de direction τ
- i = r_2 si i est un demi-tour
- i = r si i est une rotation autre que l'identité ou un demi-tour
- i = c si i est une symétrie centrée
- i = b si i est une symétrie bilatérale
- i = g = $t \circ b$ si i est une symétrie glissée composée d'une translation non identique t et d'une symétrie bilatérale b d'axe invariant par t
- i = $v_2 = t \circ r_2$ si i est le vissage composé d'une translation non identique t et d'un demi-tour r_2 d'axe invariant par t
- i = v = $t \circ r$ si i est le vissage composé d'une translation non identique t et d'une rotation r d'axe invariant par t, avec $r \neq 1$ et $r \neq r_2$
- i = a = $c \bullet r$ si i est une antirotation composée de la symétrie centrée en un point o et d'une rotation r fixant o, avec $r \neq 1$ et $r \neq r_2$.

Voici le tableau des invariants que nous obtenons .

<u>Isométries de E^1</u>

i \ inv	f
1	tous
t	aucun
c	un

<u>Isométries de E^2</u>

i \ inv	f	F	$\mathcal{F}$
1	tous	toutes	toutes
t	aucun	$F \in \tau$	toutes
r_2	un	tout F par o	toutes
r	un	aucune	aucune
b d'axe A	tout $f \in A$	A et tout $X \perp A$	dir A et dir $A^\perp$
g	aucun	une	deux

<u>Isométries de E^3</u>

i \ inv	f	F	$\mathcal{F}$	φ	Φ
1	tous	toutes	toutes	tous	toutes
t	aucun	tout $F \in \tau$	toutes	tout $\varphi \parallel \tau$	toutes
r_2 d'axe A	tout $f \in A$	A et tout $F \perp A$	dir A et toute $\mathcal{F} \perp A$	tout φ par A et tout $\varphi \perp A$	toute $\Phi \parallel A$ et la $\Phi \perp A$
r d'axe A	tout $f \in A$	A	dir A	tout $\varphi \perp A$	la $\Phi \perp A$
v_2	aucun	une	dir F et toute $\mathcal{F} \perp F$	tout plan par F	toute $\Phi \parallel F$ et dir $F^\perp$
v	aucun	une	dir F	aucun	une
C de centre o	o	tout F par o	toutes	tout φ par o	toutes
b d'axe α	tout $f \in \alpha$	tout $F \subset \alpha$ et tout $F \perp \alpha$	toute dir F	α et tout $\varphi \perp \alpha$	toute dir φ
a	un	une	une	un	une
g d'axe α et dir τ	aucun	toute $F \parallel \tau$ et $F \subset \alpha$	toute $\mathcal{F} \parallel \alpha$ et la $\mathcal{F} \perp \alpha$	un	toute $\Phi \perp \alpha$ et la $\Phi \parallel \alpha$

<u>EXERCICES</u> . 4. Compléter les tableaux ci-dessus par l'indication des demi-droites invariantes et des demi-plans invariants par les diverses transformations .

5. a) Dans E^1, quels éléments de $\{1, t, c\}$ sont des déplacements et quels sont les retournements .

b) Même exercice pour $\{1, t, r_2, r, b, g\}$ dans E^2 .

c) Même exercice pour $\{1, t, r_2, r, v_2, v, c, b, a, g\}$ dans E^3 .

6. Soit G le groupe des isométries d'un cube C dans E^3 . Quels sont tous les cubes de E^3 invariants par G ?

7. Démontrer que tout vissage de E^3 est la composée de deux demi-tours .

8. La composée d'une symétrie bilatérale b de E^3 et d'une rotation d'axe perpendiculaire à celui de b peut être ... (compléter)

LES SYMETRIES DE L'ESPACE OU SIMILITUDES .

Rappelons quelques idées traitées dans VM3, chapitre 9 . En mathématique, nous étudions des ensembles structurés . La structure est faite des notions et des propriétés rencontrées . Ainsi, l'espace E^3 est un ensemble de points, structuré par des droites, des plans, des sphères, des cylindres, des cubes, ... , par des relations comme l'orthogonalité, le parallélisme, l'inclusion, l'intersection, ... et par les propriétés des êtres que nous venons de citer .

Les symétries d'un ensemble structuré sont les transformations de l'ensemble en lui-même qui conservent la structure .

Soit E l'un des ensembles structurés ou espaces E^1, E^2, E^3.

Les symétries de E sont appelées similitudes . Afin de ne pas devoir tenir compte d'une foule de figures et propriétés à conserver, il est utile de disposer d'une définition plus concise et plus pratique qui aurait cependant les mêmes effets que la définition vague donnée ci-dessus . Nous avons donné une telle définition dans VM3 et nous la rappelons :

Une similitude s de E, de rapport r où $r \in \mathbb{R}_0^+$ est une permutation des points de E telle que $d(s(x), s(y)) = r\, d(x, y)$ pour tout choix de points $x,y \in E$.

Lorsque r = 1, s est une isométrie .

Nous avons vu dans VM3 et nous rappelons que

toute similitude s de E, transforme une droite en une droite, un plan en un plan, un angle de mesure α en un angle de mesure α, une sphère en une sphère, etc.

La preuve de ces propriétés est une conséquence du théorème 1 ci-dessous .

<u>Théorème 1</u>. Toute similitude s de rapport r dans E, est la composée d'une homothétie de rapport r et d'une isométrie .

<u>Démonstration</u> . Il faut se souvenir que la composée de deux similitudes de rapports r, r' est une similitude de rapport rr' et que l'inverse d'une similitude de rapport r est une similitude de rapport r^{-1} . Soit s une similitude de rapport r, o un point et h l'homothétie de centre o et de rapport r . Alors $i = h^{-1} \circ s$ est une similitude de rapport 1, donc une isométrie et $s = h \circ i$.

Si F est une figure ou un sous-ensemble de E, on peut s'intéresser aux similitudes de E qui transforment F en F . Celles-ci constituent un groupe . A titre d'exemple, si F est un cube, toute similitude conservant F est une isométrie car elle transforme une arête de F en une arête de F et celle-ci a la même longueur que l'arête initiale . En revanche, un cône illimité est conservé par des similitudes qui ne sont pas des isométries, par exemple des homothéties centrées au sommet du cône .

On dit parfois qu'une figure est <u>dilatable</u> lorsqu'elle est conservée par des similitudes autres que des isométries . Un cône illimité, une droite, une demi-droite, un plan, l'espace, certaines spirales sont des figures dilatables .

<u>EXERCICES</u> 9. Lesquelles des figures suivantes sont dilatables : un segment de droite, un hexagone, un angle, une graduation, l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ où x, y sont des nombres rationnels p/q où q est une puissance de 2, un cylindre illimité .

10. <u>Cas de similitude des triangles</u> .
Montrer que deux triangles abc et $a'b'c'$ sont semblables dans E si et seulement si une des conditions suivantes est remplie

a) $a\hat{b}c = a'\hat{b}'c'$ et $b\hat{a}c = b'\hat{a}'c'$

b) $b\hat{a}c = b'\hat{a}'c'$ et $\dfrac{d(a, b)}{d(a', b')} = \dfrac{d(a, c)}{d(a', c')}$

c) $\dfrac{d(a, b)}{d(a', b')} = \dfrac{d(b, c)}{d(b', c')} = \dfrac{d(a, c)}{d(c', a')}$

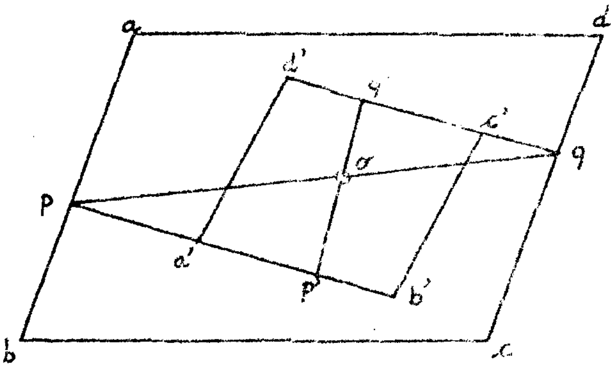
<u>LE POINT FIXE D'UNE SIMILITUDE</u> .

Nous ne ferons pas une étude complète des invariants d'une similitude . Le fait le plus remarquable est qu'une similitude de rapport $r \neq 1$ possède toujours un et un seul point fixe .

L'unicité de celui-ci est facile à établir : si p, q sont des points fixes distincts de s, $r = \dfrac{d(p, q)}{d(s(p), s(q))} = 1$.

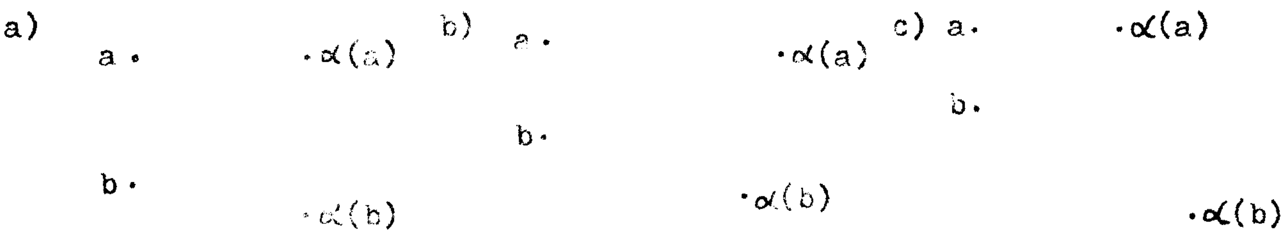
Prouvons l'existence du point fixe dans le cas du plan E^2, en livrant en même temps une construction simple de celui-ci .

Soit s une similitude du plan E^2, de rapport $r \neq 1$.
Si s est une homothétie, nous avons déjà vu comment construire son point fixe (VM3) .
Nous supposons que s n'est pas une homothétie . Alors il existe au moins 2 directions de droites qui ne sont pas conservées par s . Soit a un point et b, c des points tels que les droites ab et ac ne soient pas transformées en des parallèles par s . Considérons



le parallélogramme abcd et son transformé a'b'c'd' par s (la figure n'est pas dessinée de manière réaliste) . Comme ab $\nparallel$ a'b', ces droites se coupent en <u>un</u> point p et de même cd $\cap$ c'd' est <u>un</u> point q .
Les droites pq et p'q' ne sont pas parallèles, sinon pp'qq' est un parallélogramme et $d(p, q) = d(p', q')$ d'où $r = 1$ contrairement aux hypothèses faites au début . De ce fait pq $\cap$ p'q' est <u>un</u> point o . Comme pp' $/\!/$ qq' on a
$\frac{d(o,\ p)}{d(o,\ q)} = \frac{d(o,\ p')}{d(o,\ q')}$ et l'image de o par s doit être un point
$o' \in p'q'$ tel que $\frac{d(o',\ p')}{d(o',\ q')} = \frac{d(o,\ p')}{d(o,\ q')}$. Ceci force $o = o'$.
En construisant des parallélogrammes et leurs images par s, on peut donc déterminer le point fixe de s .

<u>EXERCICES</u> . 11. Voici deux couples $(a, \alpha(a))$ et $(b, \alpha(b))$ d'une similitude α du plan E^2, de rapport $k \neq 1$. Donnez-vous un point c et déterminez son image par α (elle est bien déterminée !) . Construire le point fixe de α .



12. Nommer une similitude du plan qui conserve
a) deux droites parallèles distinctes et pas de point
b) deux droites parallèles distinctes et un seul point
c) deux droites perpendiculaires et un seul point
d) toutes les directions de droites et un seul point
e) au moins deux points .

13. Quel est le point fixe de la similitude s si

a) s est la composée d'une rotation de centre p et d'une homothétie de centre p ?

b) s est la composée d'une symétrie bilatérale d'axe A et d'une homothétie de centre $p \in A$?

14. On munit E^2 d'un repère orthonormé constitué d'une origine o et de points unités u_1, u_2 non alignés avec o, tels que $u_1o \perp u_2o$ et $d(o, u_1) = d(o, u_2)$

a) Soit t la transformation qui transforme o en (p, q) . Alors t transforme (x, y) en (x', y') et

$$\begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases} \qquad \text{(compléter)}$$

b) Soit r la rotation d'angle α et ce centre o, qui transforme u_1 en $(\cos\alpha, \sin\alpha)$. Alors r transforme (x, y) en (x', y') et

$$\begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases} \qquad \text{(compléter)}$$

c) Montrer que tout déplacement du plan est une transformation de la forme $(x, y) \longrightarrow (x', y')$ où

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + p \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + q \end{cases} \quad \text{où } p,q \in \mathbb{R} \quad \text{et} \qquad [0, 2\pi[$$

d) Obtenir une description analogue des retournements du plan .

15. On appelle <u>dilatation</u> du plan E^2, une similitude qui conserve toute direction de droites .

a) Montrer que toute dilatation est une translation ou une homothétie

b) Montrer que les dilatations constituent un groupe

c) Montrer que dans un repère de coordonnées, toute dilatation est de la forme

$$(x, y) \longrightarrow (x', y') \quad \text{où} \quad \begin{cases} x' = kx + p \\ y' = ky + q \end{cases} \qquad \begin{matrix} p,q \in \mathbb{R} \\ k \in \mathbb{R}_0 \end{matrix}$$

Quelles sont les coordonnées du point fixe si $k \neq 1$?

<u>SIMILITUDES DIRECTES ET INDIRECTES</u> .

Les isométries de E se répartissent en deux grandes familles : le sous-groupe des déplacements d'une part et l'ensemble des retournements d'autre part . De même les similitudes se distribuent en <u>similitudes directes</u> et <u>similitudes indirectes</u> .
Dans E^3, on pourrait dire qu'une similitude est directe si elle transforme toute main gauche en une main gauche .
Voici une définition plus précise, qui se limite au plan E^2 .

Une <u>similitude directe</u> de E^2 est la composée $h \circ d$ d'un déplacement d de E^2 et d'une homothétie h .
Si tel est le cas, on peut décider de centrer h en un point arbitraire car si h est une homothétie de centre p et h' une homothétie de centre p' et de même rapport que h, on a que $h'^{-1} \circ h$ est une translation t et que $t \circ d$ est un déplacement, donc $h'^{-1} \circ h \circ d = d'$ est un déplacement et $h \circ d = h' \circ d'$.

<u>Théorème 2</u>. Les similitudes directes de E^2 constituent un sous-groupe du groupe des similitudes .

<u>Démonstration</u> 1) La permutation identique est une similitude directe car elle est la composée d'un déplacement identique et d'une homothétie identique .
2) La réciproque d'une similitude directe $h \circ d$ est égale à $d^{-1} \circ h^{-1} = (h^{-1} \circ h) \circ d^{-1} \circ h^{-1} \equiv h^{-1} \circ (h \circ d^{-1} \circ h^{-1})$ et $h \circ d^{-1} \circ h^{-1}$ est un déplacement d' dont les couples $(p, d'(p))$ sont les transformés par h, des couples de d^{-1}

$$\begin{tikzcd} q \arrow[r, "d^{-1}"] \arrow[d, "h"] & d^{-1}(q) \arrow[d, "h"] \\ h(q) \arrow[r] & d^{-1}(h(p)) = h \circ d^{-1} \circ h^{-1}(h(q)) \end{tikzcd}$$

3) La composée de deux similitudes directes $h_1 \circ d_1$ et $h_2 \circ d_2$ où nous pouvons supposer que h_1 et h_2 ont un même centre o, est égale à $(h_1 \circ h_2) \circ (h_2^{-1} \circ d_1 \circ h_2) \circ d_2$ où $h_1 \circ h_2$ est une homothétie de centre o et $h_2^{-1} \circ d_1 \circ h_2$ un déplacement comme on l'a vu en 2) .
4) Les autres propriétés requises d'un groupe, sont immédiates .

<u>EXERCICES</u> . 16. Dans l'exercice 11, déterminer les similitudes qui sont directes et celles qui sont indirectes .

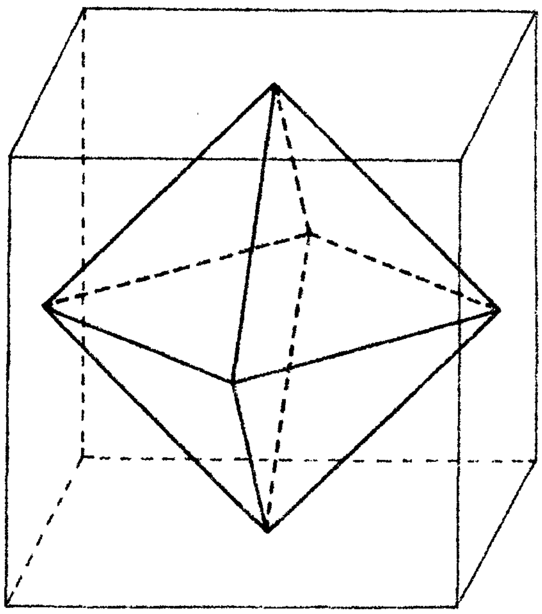
17. Lesquelles des similitudes suivantes sont directes dans E^2 ?
a) une rotation b) une homothétie c) une translation
d) une symétrie bilatérale e) une symétrie glissée
f) un déplacement g) un retournement .

18. a) Démontrer que toute similitude indirecte de E^2 est la composée d'une homothétie et d'un retournement .
b) Montrer que la composée de deux similitudes indirectes est une similitude directe .

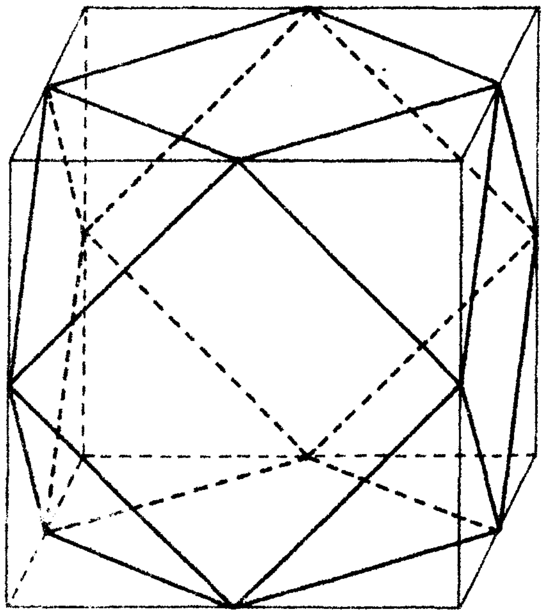
19. Démontrer que si a, b et a', b' sont deux paires de points distincts du plan E^2, alors il existe une et une seule similitude directe s telle que $s(a) = a'$ et $s(b) = b'$. A long terme, cette propriété nous livrera le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$.

ORBITES DU GROUPE DU CUBE .

Soit C un cube de E^3 et G son groupe de 48 isométries . Donnons-nous un point p sur la surface latérale de C.. L'orbite de p est constituée par l'ensemble p^G des transformés de p par G . Nous observons divers cas d'orbites sur des modèles et nous tentons de les dessiner . En reliant le point p aux points de son orbite qui sont les plus proches, nous obtenons de jolis polyèdres
Si p est le centre d'une face, p^G est l'ensemble des six milieux de faces et on obtient un octaèdre régulier



Octaèdre régulier



Cuboctaèdre

Si p est le milieu d'une arête, on découvre que p^G est l'ensemble des 12 milieux d'arêtes et le polyèdre obtenu est appelé cuboctaèdre .

EXERCICES . 20. Observer et dessiner l'orbite du point p si
a) p est sur une arête sans être au milieu ou en un sommet .
Peut-on choisir p de manière que toutes les faces du polyèdre soient régulières ?
b) p est sur une diagonale d'une face
c) p est sur une médiane d'une face
d) p est un point arbitraire d'une face .

21. Même exercice avec un tétraèdre régulier .

STABILITE, ORBITES ET INVARIANTS .

Soit G un groupe de permutations d'un ensemble E . Si F est un sous-ensemble de E, par exemple une figure, on peut s'intéresser à l'ensemble G_F des éléments de G qui conservent F c'est à dire

$$G_F = \{g \in G \mid g(F) = F\}$$

On dit que G_F est le stabilisateur de F dans G et que ses éléments stabilisent F .

Nous avons rencontré de nombreux exemples . G pourrait être le groupe des déplacements, des isométries, des similitudes et E pourrait être la droite, le plan, l'espace, la spère, un cylindre, etc... Quant à F, il pourrait s'agir d'un point, d'une droite, d'un cylindre, d'un polyèdre, d'une tapisserie .

Peut-on affirmer que le stabilisateur G_F est un sous-groupe de G ? La classe pense que oui et une démonstration s'élabore rapidement .

1) si $g \in G_F$ et $h \in G_F$, on a $g \circ h(F) = g(h(F)) = g(F) = F$ donc $g \circ h \in G_F$. C'est la propriété la plus importante .

2) L'associativité dans G_F est acquise puisqu'elle l'est dans G .

3 Le neutre 1_E de G est dans G_F car $1_E(F) = F$

4) L'inverse g^{-1} d'un élément $g \in G_F$ soulève une difficulté .
A-t-on $g^{-1} \in G_F$ ou encore $g^{-1}(F) = F$?
On a $g(F) = F$. En appliquant la transformation g^{-1}, l'égalité doit subsister, donc $g^{-1}(g(F)) = g^{-1}(F)$ et
$F = 1_E(F) = g^{-1} \circ g(F) = g^{-1}(F)$.

On a donc prouvé le résultat suivant

> Théorème : Si G est un groupe de permutations d'un ensemble E et si F est un sous-ensemble de E, alors le stabilisateur G_F de F dans E ou $G_F = \{g \in G \mid g(F) = F\}$ est un sous-groupe de G

Imaginons que E soit l'espace et G le groupe des isométries . Dans ce contexte, le théorème obtenu nous permet de parler du groupe des isométries d'un cylindre, du groupe des isométries d'un tétraèdre, d'une hélice, etc...

Et si $g \in G$ mais $g \notin G_F$? Alors g ne conserve pas F . On peut s'intéresser à tous les transformés de F par les divers éléments de G . C'est ce qu'on appelle l'orbite de F pour G dans E .

Donc $\mathrm{Orb}_G(F) = \{g(F) \mid g \in G\}$

Voici des exemples .

1) Si G est le groupe des similitudes de E^3 et si

   1.1) F est un cube, alors $\mathrm{Orb}_G(F)$ est l'ensemble de tous les cubes .

1.2) F est une sphère, alors $Orb_G(F)$ est l'ensemble de toutes les sphères .

1.3) F est un cylindre circulaire droit illimité, alors $Orb_G(F)$ est l'ensemble de tous les cylindres circulaires droits illimités .

1.4) F est un parallélépipède rectangle, alors $Orb_G(F)$ est l'ensemble des parallélépipèdes semblables à F .

2) Si G est le groupe des isométries de E^2 et si

2.1) F est un carré, alors $Orb_G(F)$ est l'ensemble des carrés ayant même aire que F .

2.2) F est un cercle de rayon r, alors $Orb_G(F)$ est l'ensemble des cercles de rayon r .

2.3) F est une rotation d'angle orienté α , alors $Orb_G(F)$ est l'ensemble des rotations du plan d'angle α .

Chaque orbite de figure est un <u>invariant</u> de G ; en d'autres termes G conserve $Orb_G(F)$ quel que soit F .

En effet, $g \in G$ et $X = h(F)$ avec $h \in G$ implique

$$g(X) = g(h(F)) = g \circ h(F) \in Orb_G(F)$$

donc $g(Orb_G(F)) \subseteq Orb_G(F)$

De même $g(Orb_G(F)) \subseteq Orb_G(F)$ et de ce fait

$$Orb_G(F) \subseteq g(Orb_G(F)) \quad \text{d'où}$$

$$g(Orb_G(F)) = Orb_G(F)$$

A la suite de F. Klein (1872), certains mathématiciens considèrent la géométrie comme l'étude des invariants des figures de l'espace, par le mouvement (déplacement), par les isométries ou par les similitudes . Si le groupe des similitudes est remplacé par le groupe des affinités, on obtient la géométrie affine de l'espace . Il n'est donc pas étonnant que les diverses transformations étudiées en détail au cours des années précédentes conservent toujours les diverses notions géométriques rencontrées . La géométrie s'intéresse tantôt aux invariants des transformations qu'elle étudie tantôt aux transformations que conservent les espaces ou figures qu'elle étudie . En voici une illustration familière .

Dans l'espace étudié depuis la première année, qu'on appelle espace euclidien, n'intervient aucune notion de <u>droite verticale</u> alors que celle-ci est si importante dans la vie courante et en hysique . Dans le groupe des déplacements de E^3, l'orbite d'une direction de droites est constitué par l'ensemble de toutes les directions de droites . Il n'y a donc pas de directions privilégiées . C'est ce qu'on appelle l'<u>isotropie</u> de l'espace . Rien ne nous empêche de travailler à présent, avec une structure supplémentaire dans E^3 qui consiste à se donner en outre, une direction de droites Δ qu'on appelle verticale . Nous obtenons ainsi une nouvelle géométrie dont le groupe des symétries G est le stabilisateur de Δ dans le groupe des similitudes de E^3 . Le groupe G comprend toutes les translations de E^3, toutes les homothéties, les rotations d'axe vertical, les symétries bilatérales d'axe vertical ou horizontal, etc... Parmi les invariants de ce groupe ou les notions de cette géométrie nouvelle, figurent les plans horizontaux qui sont les plans orthogonaux à Δ , les droites horizontales qui sont les droites orthogonales à Δ , les plans verticaux qui sont parallèles à Δ , etc .

La géométrie qu'on vient de discuter est utilisée en pratique . Enrichie encore, d'une direction privilégiée de plans verticaux (les plans frontaux) elle sert de base à la géométrie descriptive utilisée en dessin industriel ou scientifique .

EXERCICES . 22. Voici le groupe G des déplacements de E^3 .
Décrire les éléments de G_F si F est
a) un point
b) un triangle non isocèle
c) une demi-droite fermée
d) un prisme droit à base hexagonale régulière
e) une sphère
f) un cube
g) un cône droit, à base circulaire illimitée
h) une hélice

23. Reprendre l'exercice précédent en remplaçant G par le groupe des isométries .

24. Soit G le groupe des isométries d'un dodécaèdre régulier F . Classer les polyèdres convexes dont l'ensemble des sommets est une orbite de G contenue dans la surface latérale de F . Dessiner ces polyèdres en perspective cavalière .

25. Si G est un groupe de permutations de l'ensemble E, peut-on prouver que tout sous-ensemble F de E est dans une et une seule orbite de G ? Les orbites de G partitionnent-elles les sous-ensembles de G ? Si oui, quelle est la relation d'équivalence qui correspond à cette partition ?

26. Soit G le groupe des transformations du cube de Rubik engendré par les transformations élémentaires a, p, d, g, h, b et leurs inverses . On admet que les cubes centraux des faces sont fixés par G . Quelles sont les diverses orbites des autres petits cubes constituant le cube de Rubik ?

RESUME

Similitude .

- Une similitude s de $\mathbb{E}$ de rapport r où $r \in \mathbb{R}_0^+$ est une permutation des points de E telle que $d(s(a),s(b)) = r \cdot d(a, b)$ pour tout choix de a, b de $\mathbb{E}$.
- Toute similitude s de E transforme un point en un point, une droite en une droite, un plan en un plan, un angle de mesure α en un angle de mesure α , un cylindre en un cylindre ...
- L'ensemble des similitudes forme un groupe pour la loi de composition
- Toute similitude s de rapport r dans $\mathbb{E}$ est la composée d'une homothétie de rapport r et d'une isométrie .
  - Une similitude du plan est dite directe si elle est la composée d'un déplacement et d'une homothétie . L'ensemble des similitudes directes forme un sous-groupe du groupe des similitudes .
  - Une similitude du plan est dite indirecte si elle est la composée d'un retournement et d'une homothétie .
  - Une similitude de $\mathbb{E}$ de rapport $r \neq 1$ possède un et un seul point fixe .
  - Une similitude de rapport r = 1 possède zéro, un ou une infinité de points fixes .

Les similitudes de rapport r = 1 ou isométries de $\mathbb{E}^3$,

se répartissent en
- l'identité
- les translations
- les rotations
- les symétries centrées
- les symétries bilatérales
- les symétries glissées
- les vissages
- les antirotations .

<u>Orbite d'un sous-ensemble de E</u> .

- L'orbite d'un point p de E par un groupe de permutations G est l'ensemble des images de p par les permutations de G .

$$orb_G(p) = \{ g(p) \text{ tels que } g \in G \}$$

- L'orbite d'un sous-ensemble F de E par un groupe de permutations G est l'ensemble des images des éléments de F par les permutations de G

$$orb_G(F) = \{ g(F) \text{ tels que } g \in G \}$$

- Le stabilisateur G_F de F dans E est l'ensemble des permutations de G qui conservent F

$$G_F = \{ g \in F \text{ tels que } g(F) = F \}$$

Celui-ci est un sous-groupe de G .