6. RACINES .

4h/s 6h/s

Supposé acquis . Premier contact avec les racines carrées et les racines entières de nombres positifs . (VM3, chapitres 5, 7, 21)

Objectifs . Etude approfondie des racines carrées, premier contact avec les exposants fractionnaires et passage graduel aux exposants réels .

L'EQUIPAGE VOUS SOUHAITE LA BIENVENUE A BORD .

Au cours d'un vol Air France effectué en 1981, l'information suivante était fournie par la compagnie :

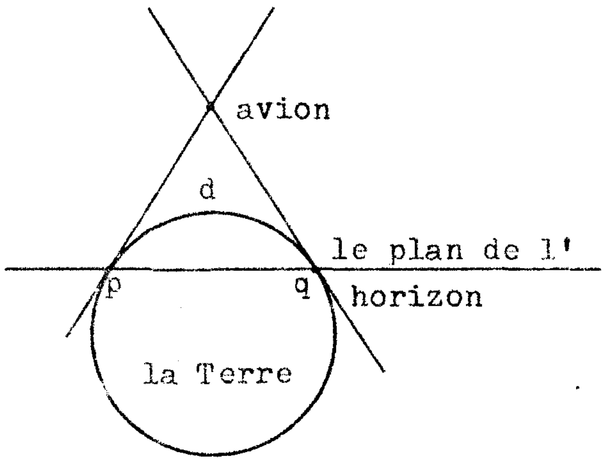
"d'un horizon à l'autre votre regard embrasse une distance qui dépend de la rotondité de la Terre et de l'altitude de l'avion "

La table que voici était fournie ainsi qu'un début d'explication théorique grâce à la formule "racine carrée de l'altitude en mètres x 3,56" .

Altitude en m	Vue en km
300	62
600	87
900	107
1500	138
3000	195
4500	239
6000	276
7500	308
9000	338
10000	356
12000	390

Le mathématicien qui sommeille dans tout passager se réveille et se demande ce que tout cela signifie .

Que signifie "d'un horizon à l'autre" ? Ceux qui ont été en avion comprennent . Le passager voit l'horizon à gauche et l'horizon à sa droite et il s'agit de la distance d entre ces deux points . Mais y a-t-il deux horizons ? "Non, l'horizon fait tout le tour" nous dit un élève . L'horizon est un cercle et nous mesurons le diamètre de celui-ci ou plutôt la longueur d'arc de grand cercle déterminé par deux points p et q opposés sur ce cercle .



Désignons par a l'altitude en mètres et par d la distance en kilomètres "embrassée par le regard" . D'après la formule donnée, nous nous demandons si $d = 3,56\sqrt{a}$ ou $d = \sqrt{3,56\ a}$

Chacun a son interprétation mais il faut reconnaître que le texte ne permet pas de trancher . Nous voyons une fois de plus combien le langage ordinaire peut être imprécis pour exprimer une loi mathématique .

Assez de lamentations ! Ne peut-on vérifier les deux formules ?

Dégainons les calculatrices et au travail ! Nous obtenons

a	$3,56\sqrt{a}$	$\sqrt{3,56\ a}$
300	61,66	32,68
600	87,20	

et la bonne formule doit donc être $d = 3,56\sqrt{a}$.

Une question demeure : d'où vient cette formule ? C'est une question difficile qui exige des connaissances du niveau de la sixième année .

EXERCICES . 1. Compléter le tableau suivant à l'aide d'une calculatrice possédant une touche $\boxed{\sqrt{x}}$, en donnant les nombres au millième près par défaut (on arrondit vers le bas) . Si la machine possède des mémoires, utiliser celles-ci pour stocker les constantes 4,23 ; 1,98 ; $\frac{\sqrt{5}}{3}$ et simplifier votre travail en utilisant une touche $\boxed{\text{RCL}}$.

x	$4,23\sqrt{x} - 1,98$	$4,23\ x^2 - 1,98$	$\frac{\sqrt{5x}}{3}$
0,127			
2,391			
4,57			
10^6			
10^{100}			
-3			
0			

2. Rechercher un programme permettant de résoudre l'exercice 1 plus facilement (revoir VM3, chap. 23)

Exemple pour TI 58 et le calcul $4,23\sqrt{x} - 1,98$

$\boxed{\text{LRN}}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{Lbl}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\sqrt{x}}$ $\boxed{\times}$ 4.23 $\boxed{-}$ 1.98 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{R/S}}$ $\boxed{\text{LRN}}$

On utilise ce programme en introduisant une valeur de x, par exemple 1, en pressant $\boxed{\text{A}}$ et la machine affiche le résultat : 2,25 .

CE QU'IL NE FAUT PAS OUBLIER .

Si $a \in \mathbb{R}$, $a^2 \geqslant 0$ quel que soit a . Les racines carrées concernent donc avant tout les nombres réels positifs .

Considérons un réel positif $a \in \mathbb{R}^+$. Nous avons admis qu'<u>il existe un et un seul nombre réel positif dont le carré est égal à a</u> . Ce nombre est noté $\boxed{\sqrt{a}}$

On l'appelle <u>racine carrée de a</u> . Donc $\sqrt{a} \in \mathbb{R}^+$ et $(\sqrt{a})^2 = a$

Remplaçons à présent la puissance 2 par une puissance $n \in \mathbb{N}$.

Nous avons admis qu'<u>il existe un et un seul nombre réel positif dont</u>

la puissance nième est égale à a . Ce nombre est noté $\boxed{\sqrt[n]{a}}$

On l'appelle racine nième de a .

Donc si $a \in \mathbb{R}^+$, on a $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}^+$ et $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

Voyons si la classe a saisi . Que valent $\sqrt{4}$, $\sqrt{100}$, $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[4]{256}$, $\sqrt[7]{0}$, $\sqrt[7]{1}$, $\sqrt{-1}$, $(\sqrt{9876543})^2$?

Les réponses viennent d'abord facilement : $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{100} = 10$, $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[4]{256} = 4$, $\sqrt[7]{0} = 0$, $\sqrt[7]{1} = 1$.

On s'arrête à $\sqrt{-1}$. Certains veulent que $\sqrt{-1} = -1$. Mais non ! $(-1)^2 = 1$. Or nous tenons par dessus tout à

$$(\sqrt{a})^2 = a \qquad\qquad (\sqrt[n]{a})^n = a \qquad (1)$$

Alors ? $\sqrt{-1}$ n'est pas un réel ; il n'y a pas de réel dont le carré est -1 . Est-ce la fin de $\sqrt{-1}$? Non . Vous verrez peut-être plus tard qu'on peut englober $\mathbb{R}$ dans un ensemble de nombres plus vaste, les nombres complexes , où une place est faite à $\sqrt{-1}$.

Bref, ceci exige de créer de nouveaux nombres . Certains sont sceptiques . Que fait une calculatrice si on y introduit $-1\boxed{\sqrt{x}}$? L'une d'elles affiche 1, l'efface et le reproduit constamment . Elle est clairement perturbée . Une autre affiche "Error" : elle n'en veut pas .

Et $(\sqrt{9876543})^2$? La machine est utilisée et livre 9876543 . Bien sûr, la plupart avaient oublié la propriété (1) c'est à dire l'essentiel .

Une élève demande comment on fait $\sqrt[3]{701}$ avec la machine car la sienne n'a pas de touche $\sqrt[3]{x}$. Aucune machine ne possède une telle touche . D'ailleurs il faudrait beaucoup de touches pareilles : une pour tout $n \in \mathbb{N}$. Un peu de théorie va permettre de surmonter l'obstacle . Mais d'abord un peu d'exercice .

EXERCICE . 3. Si a, b, c sont des réels positifs et si $n \in \mathbb{N}$, simplifier a) $\sqrt{a^2}$ b) $\sqrt{a^4}$ c) $\sqrt{a^6}$ d) $\sqrt{a^{2n}}$ e) $\sqrt[3]{b^2}$

f) $\sqrt[3]{b^6}$ g) $\sqrt[3]{b^{3n}}$ h) $\sqrt[n]{a^{2n}}$ i) $\sqrt[n]{a^{5n}\, b^n\, c^{3n}}$

EXPOSANTS FRACTIONNAIRES .

Après avoir effectué l'exercice 3, on se rend compte que la racine nième se comporte comme un exposant fractionnaire . Tout se passe comme si [illegible] (a exposant $\frac{1}{n}$)

Voyons si notre calculatrice disposant d'une touche $\boxed{y^x}$ accepte de tels calculs : $8^{1/3} = 2$, $256^{1/4} = 4$, $100^{1/2} = 10$.

Et cette fois il n'y a plus d'obstacle au calcul de $\sqrt[3]{701} = (701)^{1/3}$ $= 8,883...$ qu'on calcule par la séquence

701 $\boxed{y^x}$ 3 $\boxed{1/x}$ $\boxed{=}$

On s'assure du résultat en l'élevant à nouveau au cube c'est à dire par $\boxed{y^x}$ 3 $\boxed{=}$ ce qui livre bien 701 .

De même, sur la Casio College fx-80 on peut exécuter

701 $\boxed{\text{inv}}$ $\boxed{y^{1/x}}$ 3 $\boxed{=}$

et aboutir au même résultat .

Nous découvrons ainsi des exposants fractionnaires .

> Si a, b sont des réels positifs et si $n \in \mathbb{N}$, on pose
> $\sqrt[n]{a} = b$ si et seulement si $a = b^n$ et $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$
> Donc $a^{1/n} = b$ $\quad a = b^n$

De même si $a \in \mathbb{R}^+$ et si p,q sont entiers avec $q > 0$, on pose

$$\boxed{a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}}$$

Ainsi rencontrons-nous une nouvelle simplification dans nos connaissances : l'extraction de racines est ramenée aux puissances . Mais des propriétés connues des puissances entières demeurent-elles valables pour les puissances fractionnaires ? Voyons cela .

Si a, b sont des réels positifs, a-t-on

$$(ab)^{p/q} = a^{p/q}\, b^{p/q} \quad \text{pour } p,q \in \mathbb{Z} \text{ et } q > 0 \ ?$$

Posons $X = (ab)^{p/q}$ et $Y = a^{p/q}\, b^{p/q}$

On a $X^q = (ab)^p$

De même $Y^q = (a^{p/q})^q\, (b^{p/q})^q = a^p b^p = (ab)^p$

Donc $X^q = Y^q$ et comme ce réel admet une seule racine positive qième on a également $X = Y$.

A-t-on $(a^{p/q})^{r/s} = a^{pr/qs}$?

Reprenons une tactique qui a réussi en posant

$X = (a^{p/q})^{r/s}$ et $Y = a^{pr/qs}$

On a $X^s = (a^{p/q})^r$ et $(X^s)^q = a^{pr}$

De même $Y^{qs} = a^{pr}$. Donc $(X^s)^q = X^{qs} = Y^{qs}$ et comme ce réel possède une seule racine positive qième on a $X = Y$.

Nous retenons les propriétés qu'on vient d'établir et quelques autres à traiter dans les exercices .

Si a,b sont des réels positifs et p, q, r, s des entiers avec $q > 0$, $s > 0$, on a

$(ab)^{p/q} = a^{p/q}\, b^{p/q}$	$(a^{p/q})^{r/s} = a^{pr/qs}$
$a^{p/q}\, a^{r/s} = a^{p/q + r/s}$	

EXERCICES . 4. Compléter le tableau suivant à l'aide d'une calculatrice disposant d'une touche $\boxed{y^x}$. Arrondir au centième inférieur .

x	$\sqrt[9]{x}$	$x^{3/4}$	$x^{100/103}$
7			
0,18			
$35{,}7 \cdot 10^8$			
4625,89			

5. Démontrer que si a,b sont des réels positifs et p,q,r,s des entiers avec p,s positifs , on a

a) $a^{p/q} \cdot a^{r/s} = a^{p/q + r/s}$

b) $a^{p/q} : a^{r/s} = a^{p/q - r/s}$

c) $(a + b)^{p/q} \neq a^{p/q} + b^{p/q}$ sauf cas particulier .

6. Simplifier $(a, b, c \in \mathbb{R}_0^+)$

a) $((\frac{4}{5}\, a^4\, b)^2 \sqrt{c^4}\,)^{1/2}$ b) $(\frac{1}{2}(\sqrt[3]{2a^2bc^3}\,)^2 a)^3$ c) $((2a)^{2/5}\, 3a^2b)^4$

d) $a^5\, b\, /\, a^{1/2}\, b^{1/2}$ e) $\dfrac{25\, a^{4/3} bc^{2/3}}{5\, ab}$ f) $\sqrt[4]{a^{16}\, b\, /\, a^5}$

7. A-t-on

a) $(\frac{a}{b})^{-p/q} = (\frac{b}{a})^{p/q}$?

b) $(\frac{a}{b})^{-p/q} = (\frac{a}{b})^{q/p}$?

c) $(\frac{a}{b})^{-p/q} = (\frac{b}{a})^{q/p}$?

8. Mettre sous forme d'exposant fractionnaire .

a) $a^{0,5}$ b) $3^{0,15}$ c) $10^{15,25}$ d) $a^{1,2}\, b^{3,59}$ e) $a^{1,\overline{3}}$ f) $a^{1,\overline{357}}$

rappel : $1,\overline{46} = 1,4646464646...$

9. Utiliser une machine possédant une touche $\boxed{\sqrt{x}}$ et une touche $\boxed{y^x}$

a) Partant de 2, on calcule successivement $\sqrt{2}$, $\sqrt{\sqrt{2}}$, $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$,... en répétant 10 fois cette opération . Noter le nombre affiché .

b) A-t-on $x = 2^{1/2^{10}}$?

c) Partant de x, calculer successivement x^2, $(x^2)^2$, $((x^2)^2)^2$;... en répétant 10 fois cette opération . Obtient-on 2 comme résultat ? Comment s'explique ce résultat ?

d) Calculer $2^{1/2^{10}}$ en utilisant la touche $\boxed{y^x}$. Retrouve-t-on

e) Reprenons a) en répétant longuement l'opération jusqu'à ce que la machine affiche 1 . Combien de fois a-t-il fallu exécuter l'opération ? Si on élève 1 à une puissance convenable, retrouve-t-on 2 ? Que s'est-il passé ?

10. a) Si $abc = 2$, que vaut $a^5b^5c^5$?
b) Si $a^{13} = 4$, que vaut $(a^{-7})^7(a^{-6})^6$?
c) Si $b^{9/5} = 3$, que vaut $b^{10/7}$?

11. Effectuer les produits
a) $\sqrt{29}\sqrt{21-\sqrt{29}}$ $\qquad\qquad$ $\sqrt{3}\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{12}}$

12. A-t-on $1+\sqrt{3} = \sqrt{3+\sqrt{13+4\sqrt{3}}}$?

13. Mettre sous forme de radical et simplifier si possible :
a) $27^{1/2}$ b) $64^{1/2}$ c) $64^{6/2}$ d) $(\frac{25}{16})^{1/2}$ e) $40^{1,5}$ f) $(0,25)^{0,5}$

14. Simplifier les radicaux $(x \in \mathbb{R}^+)$
a) $\sqrt[6]{8}$ b) $\sqrt[6]{72}$ c) $\sqrt[3]{120}$ d) $\sqrt[6]{x^8}$ e) $\sqrt[18]{x^{27}}$ f) $\sqrt[20]{x^{100}}$
g) $\sqrt[121]{x^{77}}$

15. Réduire les radicaux suivants à un même indice $(a \in \mathbb{R}^+)$
<u>Exemple</u> : $\sqrt[12]{a^3}$ et $\sqrt[15]{a^9}$ se réduisent à $\sqrt[60]{a^{15}}$ et $\sqrt[60]{a^{36}}$
ou $a^{3/12}$ et $a^{9/15}$ se réduisent à $a^{15/60}$ et $a^{36/60}$
Il s'agit d'une réduction de fractions au même dénominateur . Une petite erreur (volontaire) s'est glissée dans notre exemple . Mieux vaut simplifier les fractions avant de les réduire au même dénominateur .
Ainsi $a^{3/12}$ et $a^{9/15}$ se ramènent à $a^{1/4}$ et $a^{3/5}$ ou $a^{5/20}$ et $a^{12/20}$.

a) $\sqrt[4]{a}$ et $\sqrt[3]{a^2}$ $\qquad$ b) $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$ et $\sqrt{a^3}$
b) $\sqrt[15]{a^{12}}$, $\sqrt[20]{a^7}$ et $\sqrt[12]{a^5}$ $\qquad$ d) $\sqrt[6]{12}$ et $\sqrt[4]{8}$

16 Simplifier les radicaux (c'est à dire extraire du radical tout ce qui peut l'être comme dans $\sqrt[3]{a^6\ b\ c^3} = a^2\ c\sqrt[3]{b}$ (toutes les lettres représentent des réels positifs) .

a) $\sqrt{x^8\ y^7\ z}$ $\qquad$ b) $\sqrt[3]{a^{12}\ b^7\ c^{15}}$ $\qquad$ c) $\sqrt[4]{(a+1)^8\ b^7\ c^6}$
d) $\sqrt[3]{192}$ $\qquad$ e) $\sqrt[4]{48}$ $\qquad$ f) $\sqrt[3]{54}$
g) $\sqrt[3]{64\ a^5}$ $\qquad$ h) $\sqrt[4]{32\ a^{12}}$ $\qquad$ i) $\sqrt[n]{a^{2n}}$
j) $\sqrt[n]{x^{n+9}}$ $\qquad$ k) $\sqrt[n]{2^n\ b^{n+1}\ c^{2n}}$ $\qquad$ l) $\sqrt[3]{8a+32}$

m) $\sqrt{a^4 + a^2}$　　　n) $\sqrt[3]{8/64}$　　　o) $\sqrt{\frac{a^4}{4}}$

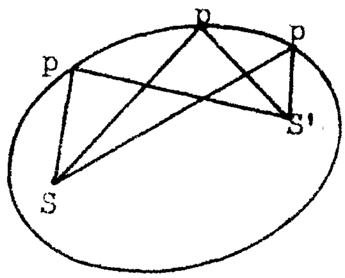
p) $\sqrt[n]{\frac{a^{n+1}}{b^n}}$　　　q) $\sqrt[n]{\frac{x^{2n+1}}{y^{n+1}}}$　　　r) $\sqrt{\sqrt{x}}$

s) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}}$　　　t) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{8x^3\ y^{12}}}$　　　u) $\sqrt[n]{\sqrt[3]{x^{2n}\ y^{3n}}}$

EXPLORATION SPATIALE .

Les corps célestes les plus proches de la Terre sont les planètes et leurs satellites qui gravitent autour du soleil . Imaginons que le Soleil soit réduit à un point S immobile dans l'Espace et qu'une planète soit également réduite à un point p .

En utilisant les nombreuses mesures précises accumulées par ses devanciers, J. Kepler (1571 - 1630) découvrit que la trajectoire de p autour de S n'est pas exactement un cercle mais bien une ellipse dont un des foyers est S . Nous avons déjà rencontré cette situation dans VM3, chap. 16 .



Si on donne des points S et S' et un point p du plan, l'ellipse de foyers S, S' passant par p est l'ensemble des points x tels que

$|xS| + |xS'| = |pS| + |pS'|$

Kepler calcula la distance moyenne d (en km) de p à S, pour diverses planètes . Il s'agit d'une moyenne arithmétique des observations effectuées . D'un point de vue théorique, c'est une moyenne d'un nombre infini de positions et ceci exige la notion d'intégrale qu'on verra en sixième . Kepler calcula également la durée t (en jours) que met p pour effectuer un tour complet de S et se retrouver dans la même position (t est la période que nous avons déjà rencontrée pour sin x)

Voici des valeurs de d et t pour diverses planètes (d'après Galion - Mathématique 4e - OCDL Hatier 1979) .

	Mercure	Vénus	Terre	Mars	Jupiter	Saturne
d(km)	$5{,}79\cdot10^7$	$1{,}08\cdot10^8$	$1{,}49\cdot10$	$2{,}28\cdot10$	$7{,}78\cdot10$	$1{,}43\cdot10$
t(jours)	88	225	365	687	4333	10760

Képler eut l'idée de calculer $\frac{d^2}{t^2}$ (parmi sans doute beaucoup d'autres) et il constata que cette grandeur est à peu près la même pour toutes les planètes du Soleil . Cette loi de Kepler nous aide à comprendre le mouvement des planètes et elle peut nous aider à prévoir ce qui se passe dans des systèmes planétaires encore inconnus ou tout simplement dans le système des satellites artificiels de la Terre .

EXERCICES . 17. Vérifier la constance de $\frac{d^2}{t^2}$ d'après le tableau ci-dessus, à l'aide d'une calculatrice .

18. Rédiger un programme qui permette de faciliter les calculs précédents .

19. Supposons qu'on découvre une nouvelle planète qui effectue une révolution autour du Soleil en 3 ans . Quelle sera sa distance moyenne au Soleil ?

ENCADRER UNE RACINE nième AVEC UNE MACHINE RUDIMENTAIRE .

Supposons qu'on se serve d'une calculatrice disposant seulement des quatre opérations élémentaires ou qu'on ne dispose d'aucune calculatrice . Comment peut-on estimer par exemple $\sqrt[13]{105,27} = x$?
L'idée de base est d'encadrer x et il convient pour cela de se souvenir que dans $\mathbb{R}^+$, si n est naturel

$x < y \Leftrightarrow x^n < y^n$ donc

$$\boxed{\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x < y \quad \text{pour } x,y \in \mathbb{R}^+ \text{ et } n \in \mathbb{N}_0}$$

Si on veut estimer $x = \sqrt[13]{105,27}$ on cherche deux nombres qui encadrent 105,27 et dont les racines treizièmes sont connues, par exemple

$1 = 1^{13}$ et 2^{13} . Ainsi $1 < 105,27 < 2^{13} \Leftrightarrow 1 < x < 2$
Nous obtenons donc un premier encadrement de x : $x \in]1, 2[$
Et ensuite ? Nous pouvons faire un essai avec 1,3 au lieu de 1 ou 2 . On calcule $(1,3)^{13}$ avec patience, puis $(1,4)^{13}$, $(1,5)^{13}$ et on constate que $(1,4)^{13} = 79,37 < 105,27 < (1,5)^{13} = 194,61$
donc $1,4 < x < 1,5$
Nouvel essai avec 1,45 . On a $(1,45)^{13} = 125,25$ donc $x < 1,45$
Ensuite $(1,44)^{13} = 114,47$; $(1,43)^{13} = 104,56$;
$(1,432)^{13} = 106,47$; $(1,434)^{13} = 108,4$; $(1,433)^{13} = 107,4$;
$(1,431)^{13} = 105,51$ donc $x = 1,430...$
Une vérification à la machine par 105.27 $\boxed{y^x}$ 13 $\boxed{1/x}$ livre 1,43074...

EXERCICES . 20. Obtenir les racines suivantes au centième par défaut près, en utilisant uniquement des élévations aux puissances entières sur machine .

a) $\sqrt{19}$, b) $\sqrt[5]{2379,51}$ c) $\sqrt[8]{0,01}$

21. a) Si a et b sont des nombres rationnels et si $x \in]1, +\infty[$ démontrer que $a < b \Leftrightarrow x^a < x^b$

b) Si a et b sont des nombres rationnels et si $x \in]0, 1[$ montrer que $a < b \Leftrightarrow x^a > x^b$

22. $x = \sqrt{1141\ y^2 + 1}$

a) Pour $y = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 100$ montrer que x n'est pas entier .

b) Croyez-vous qu'il y a des valeurs entières de y qui rendent x entier ? Il y en a . La plus petite est

$y = 30\ 693\ 385\ 322\ 765\ 657\ 197\ 397\ 208$

UN PROGRAMME POUR LE VOLUME DE LA SPHERE .

Calculer le volume d'une sphère de rayon r est facile . Il suffit d'utiliser la formule $V = \frac{4}{3}\pi r^2$

Avec une calculatrice, c'est un jeu d'enfant . Ainsi, avec une TI 58 C, pour r = 5,37, il suffit d'effectuer

$$5.37\ \boxed{y^x}\ 3\ \boxed{x}\ \boxed{2nd}\ \boxed{\pi}\ \boxed{x}\ 4\ \boxed{\div}\ 3\ \boxed{=} \qquad (1)$$

et la machine affiche le résultat 648.6515593 .

Si nous sommes forcés de calculer ce volume pour douze ou cent valeurs différentes de r, un petit programme nous épargnera bien des efforts . Voici un modèle .

LRN

2nd Lbl A

$$\boxed{y^x}\ 3\ \boxed{x}\ \boxed{2nd}\ \boxed{\pi}\ \boxed{x}\ 4\ \boxed{\div}\ 3\ \boxed{=} \qquad (2)$$

R/S

LRN

On voit bien la différence avec (1) . La suite des opérations est mémorisée par la machine . Il suffit, à présent d'introduire 5.37 $\boxed{A}$ et la machine affiche 648.6515593 . Le programme fonctionne .

Pour une dizaine de calculs du volume V, c'est vraiment pratique . Pour une centaine de valeurs de r ce sera fastidieux à nouveau . On perd son temps à introduire des valeurs de r . Ne peut-on demander à la machine de faire ce travail ? Peut-être . Il suffit de demander à la fin du calcul initial pour r, que la machine passe d'elle-même à r + 0,01, puis à r + 0,02 etc. C'est ce qu'on appelle une boucle dans le programme . En voici un modèle à comparer avec (2) .

```
    LRN
    2nd Lbl   A
    STO   00     (Il faudra se souvenir de la valeur initiale de r
┌── 2nd Lbl   B    pour passer à  r + 0,01 dans la deuxième boucle)
│   RCL  00  +  0,01
│   STO  00      (r a été remplacé par r + 0,01 dans la mémoire 00)
│   [y^x]  3  [x]  [2nd]  [π]  [x]  4  [+]  3  [=]
│   R/S
└── GTO B   (La boucle s'accomplit, on repart en 2nd Lbl B avec la
    LRN        la nouvelle valeur de r en mémoire)
```

Exécution : on introduit 5.36 A, la machine affiche 648.6515593 comme précedemment , on fait $\boxed{R/S}$ (qui relance le programme par GTO B), la machine affiche 652.2820633, on refait $\boxed{R/S}$, elle affiche 655.92... etc .

Nous obtenons ainsi le tableau de valeurs

r	$\frac{4}{3}\pi r^3$	r	$\frac{4}{3}\pi r^3$
5.37	648.65	5.42	666.93
5.38	652.28	5.43	670.63
5.39	655.92	5.44	674.34
5.40	659.58	5.45	678.07
5.41	663.25	5.46	681.81

EXERCICES . 23. Ecrire et tester des programmes qui permettent de calculer

a) x^5 lorsque x parcourt $[1, 10]$ avec des accroissements de 0,3 .

b) $\sin x$ lorsque x parcourt $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ avec des accroissements de 0,1 .

c) 2^x lorsque x parcourt $[-10, 10]$ avec des accroissements de 1.

d) $3x^2 - \frac{1}{x+5}$ lorsque x parcourt $[-6, 2]$ avec des accroissements de 0,5

24. Représenter sur un même graphique les fonctions d'une variable $x \longrightarrow x^n$ pour $n = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3, 4, 5$.

25. Les fonctions $x \longrightarrow x^n$ où $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{Q}$ sont-elles croissantes ?

26. Résoudre graphiquement les équations suivantes

a) $x^{3/2} = 3x - 5$ b) $\sqrt{x} = x + 2$ c) $y^{3/4} = 3y^2 + 1$

d) $x^{29/3} = \sqrt{x} + x^2$

27. Représenter graphiquement (pour $a \in \mathbb{R}$)

a) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} + x$ c) $\dfrac{3}{\sqrt{x}} - x^2$ d) $\sqrt{x+1}$ e) $\sqrt{x+a}$

f) $a\sqrt{x}$ g) $a\sqrt{x+b} + c$.

LE CALCUL APPROCHE D'UNE SOMME .

Comment trouver une valeur approchée de la somme

$$a = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{10}} \quad ? \qquad (1)$$

Il est évidemment hors de question d'effectuer cette somme même avec une calculatrice ordinaire, non programmable .

Les inégalités et les encadrements viennent à notre secours .

$$0 < 1$$

$$\Longrightarrow \quad 4n^2 + 4n < 4n^2 + 4n + 1 \qquad \text{pour } n \in \mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow \quad 4n(n+1) < (2n+1)^2$$

$$\Longrightarrow \quad 2\sqrt{n(n+1)} < 2n + 1$$

$$\Longrightarrow \quad 2\sqrt{n+1} < 2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\Longrightarrow \quad 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad (2)$$

De même
$$4n(n-1) < (2n-1)^2 \qquad \text{pour } n \in \mathbb{N}_0$$

$$2\sqrt{n(n-1)} < 2n - 1$$

$$2\sqrt{n-1} < 2\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} \qquad (3)$$

Grâce à (2) et (3) chaque terme $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ de (1) est encadré par

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$$

et la somme a dans (1) est encadrée par

$$2(\sqrt{2} - 1) < 1 < 2$$

$$2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) < \frac{1}{\sqrt{2}} < 2(\sqrt{2} - 1)$$

$$2(\sqrt{4} - \sqrt{3}) < \frac{1}{\sqrt{3}} < 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$2(\sqrt{10001} - \sqrt{10^4}) < \frac{1}{\sqrt{10^4}} < 2(\sqrt{10^4} - \sqrt{9999})$$

ce qui livre $2(\sqrt{10001} - 1) < a < 2\sqrt{10^4}$

Comme $100 < \sqrt{10001}$ on en déduit que

$$2(100 - 1) < a < 200 \qquad \text{ou} \qquad 198 < a < 200$$

Il est possible d'améliorer encore ce résultat en observant que $1 < 2$ peut être remplacé par $1 \leqslant 1$ de sorte que $a < 2\sqrt{10^4} - 1 = 199$. Par conséquent $a \in [198, 199]$.

N'est-ce pas un résultat spectaculaire obtenu à peu de frais, à condition de disposer des bonnes idées ?

EXERCICES . 28. Déterminer une valeur approchée de

$$S_m = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{m^2}} \qquad \text{où} \quad m \in \mathbb{N}_0$$

en démontrant que $2m - 2 < S_m < 2m - 1$

29. Elaborer un programme qui permette de calculer S_m (exercice 28) et a donné par (1) sur machine .

30. Exercice récapitulatif . (d'après une idée de C. Mechelynck)
Il convient de simplifier les expressions suivantes pour a, b, c, d réels strictement positifs . Nous donnons aussi une liste de réponses mais attention, certaines sont fausses .

1) $-\sqrt{9} =$

2) $\sqrt{(-9)(-4)} =$

3) $\sqrt{\frac{-4096}{-4}}$

4) $\sqrt{\frac{2 - \frac{1}{4}}{14}} =$

5) $\sqrt{5}\sqrt{10}\sqrt{15}\sqrt{20} =$

6) $\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 7\sqrt{2} =$

7) $5\sqrt{2} - \sqrt{18} + \sqrt{98} =$

8) $\sqrt{64a^7b^6} =$

9) $\sqrt{63a^{51}b^{19}} =$

10) $\sqrt{a^{18}} =$

11) $\sqrt{a^{19}} =$

12) $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{7^3}} =$

13) $\sqrt{10^{-9}} =$

14) $\sqrt{10^{-15}} =$

15) $\sqrt{10^{17}} =$

16) $\frac{\sqrt{0,1}}{\sqrt{0,00004}} =$

17) $\sqrt{\frac{5}{12} + \frac{5}{18}} =$

18) $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}) =$

19) $\frac{\sqrt{9a^5b^7c^4}}{\sqrt{18a^9b^3c^5}} =$

20) $\frac{\sqrt{0,04}}{10} =$

21) $\sqrt{7 \cdot 4^2 \cdot 12^3 \cdot 14^2} =$

22) $(\sqrt{185})^2 =$

23) $\sqrt{\frac{1}{10^{-4}}} =$

24) $\dfrac{\sqrt{3}\,\sqrt{18}}{\sqrt{2}} =$

25) $\dfrac{\sqrt{15}\,\sqrt{10}\,\sqrt{7}}{\sqrt{70}\,\sqrt{6}} =$

26) $(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 =$

27) $(\sqrt{3} + 1)^2 + (\sqrt{3} - 1)^2 =$

28) $\dfrac{a\sqrt{\frac{b}{c}} - d\sqrt{\frac{c}{b}}}{\sqrt{ab} + \sqrt{dc}} =$

29) $\sqrt{72} + \sqrt{288} - \sqrt{2} =$

30) $\sqrt{559\,504} =$

31) $\sqrt{675} =$

32) $\sqrt{5184}$

33) $\sqrt{1014}$

34) $(\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{3} - \sqrt{5}) =$

35) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 =$

36) $(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2 =$

37) $(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})(-3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}) =$

38) $\sqrt{135\,520}$

39) $\sqrt{3^{1920}}$

40) $\sqrt{5^{18021}} =$

Réponses .

1) -3

2) -6

3) 32

4) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

5) $50\sqrt{2}\sqrt{3}$

6) $3\sqrt{2}$

7) $2\sqrt{2}$

8) $8a^3b^3\sqrt{a}$

9) $3a^{25}b^9\sqrt{7ab}$

10) a^9

11) $a^9\sqrt{a}$

12) $\dfrac{\sqrt{3}}{7}$

13) $10^{-4}\sqrt{10^{-1}} = \dfrac{\sqrt{10}}{10^5}$

14) $\dfrac{\sqrt{10}}{10^8} = 10^{-7}\sqrt{10^{-1}}$

15) $10^8\sqrt{10}$

16) 50

17) $\dfrac{5}{6}$

18) 6

19) $\dfrac{b^2}{a^2\sqrt{2c}}$

20) $0{,}02$

21) $2\cdot4\cdot12\cdot14\sqrt{7\cdot3} = 1344\sqrt{21}$

22) 185

23) 10^2

24) $3\sqrt{3}$

25) $\sqrt{\dfrac{5}{2}}$

26) $5 + 2\sqrt{6}$

27) 8

28) $\sqrt{\dfrac{a}{c}} - \sqrt{\dfrac{d}{b}}$

29) $17\sqrt{2}$

30) 748

31) $15\sqrt{3}$

32) 72

33) $13\sqrt{6}$

34) -2

35) $5 + 2\sqrt{6}$

36) $8 - 2\sqrt{6}$

37) -24

38) $44\sqrt{70}$

39) 3^{960}

40) $5^{9010}\sqrt{5}$

31. Calculer

1) $4^{1{,}5}$ 2) $8^{0{,}3333\ldots}$ 3) $\left(\dfrac{1}{81}\right)^{-3/4}$ 4) $\left(\dfrac{81}{16}\right)^{-1/4}$

32. Simplifier $(a, b, c \in \mathbb{R}_0^+)$

1) $\sqrt[3]{2^{12}}$

2) $\sqrt[4]{81^2}$

3) $10^{3{,}5}$

4) $\sqrt[3]{189}$

5) $\sqrt[3]{a^7b^3}$

6) $\sqrt[4]{48}$

7) $\sqrt[4]{32a^9b^{16}}$

8) $\sqrt[n]{a^{n+1}}$

9) $\sqrt{a^4 + a^2}$

10) $\sqrt[3]{8a^3 + 8}$

11) $\sqrt[4]{\dfrac{a^{10}b^6}{c^{16}}}$

12) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^{24}}}$

13) $\sqrt[n]{\dfrac{a^{2n+1}}{b^{-n}}}$

14) $\sqrt[n]{\sqrt[3]{a^{2n}b^{3n}}}$

15) $a^{3/2}a^{1/2}a^{-1}$

16) $a^{2{,}5}a^{1{,}2}a^{-4{,}7}$

33. Réduire les radicaux au même indice $(a \in \mathbb{R}^+)$

1) $\sqrt[4]{a^3}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt{a^3}$ 2) $\sqrt[5]{7}$, $\sqrt[4]{6}$ 3) $\sqrt[4]{9}$, $\sqrt{6}$

34. Effectuer $(a,b$ dans $\mathbb{R}^+)$

$\sqrt[3]{a^7b^4} - 3\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{a^2b}$

35. Calculer pour $a = 2$, $b = 9$, $c = 1$.

1) $E = a^{-2}b^0c^{\sqrt{2}}$ 2) $E = (a + b^{-1/2})^{-c}$

36. Simplifier en conservant les exposants fractionnaires .

1) $E = \dfrac{(10^{-2/3})^2 \cdot (10^{-1/4})^4}{(10^{-1})^3 \cdot (10^{2/3})^{1/3}}$ 2) $\dfrac{(a^4)^{-2} \cdot (b^{-2})^{1/2}}{(a^{-3})^4 \cdot (b^{-3})^{1/2}}$

37. Si $8p > 1$ calculer

$$\left(p + \frac{p+1}{3}\left(\frac{8p-1}{3}\right)^{1/2}\right)^{1/3} \cdot \left(p - \frac{p+1}{3}\left(\frac{8p-1}{3}\right)^{1/2}\right)^{1/3}$$

38. Effectuer pour a,b,x,y dans $\mathbb{R}_0^+$

1) $(a^{3/2} + a^{1/2} - 1)(a^{3/2} - a^{1/2} + 1) - (a - a^{-1/2} + 1)(a + a^{1/2} - 1)$

2) $(x^{1/3} - y^{1/3})(x^{2/3} + x^{1/3}y^{1/3} + y^{2/3})$

3) $\dfrac{\sqrt{a^3b^2}}{\sqrt{a}} - \dfrac{\sqrt{9a^7b^4}}{\sqrt{a^5b^2}} + \dfrac{\sqrt{36a^4b^3}}{\sqrt{9a^2b}}$

4) $\dfrac{\sqrt[3]{12a^4b^5}}{\sqrt[3]{5b^2}} - \dfrac{\sqrt[3]{45b}}{\sqrt[3]{4ab}}$

5) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^2}} \cdot \sqrt[6]{\sqrt[4]{a^9}} \cdot \sqrt[3]{a^2 \sqrt[8]{a^7}}$

6) $((a + (a^2 - b^3)^{1/2} (a - (a^2 - b^3)^{1/2})^{1/3}$

RESUME

La racine carrée d'un nombre

Pour tout $a \geq 0$: $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ b^2 = a \end{cases}$

La racine nième d'un nombre .

Pour tout $a \geq 0$

Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ $\quad \sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ b^n = a \end{cases}$

$$\sqrt[n]{a^p} = a^{p/n}$$

pour tout $p,n,q,r \in \mathbb{N}_0$

pour tout $a,b \in \mathbb{R}_0^+$

Propriétés .

$$(a^{p/q})^{n/r} = a^{p/q \cdot n/r}$$

$$(ab)^{p/q} = a^{p/q} \cdot b^{p/q}$$

$$a^{p/q} \cdot a^{r/n} = a^{p/q + r/n}$$

$$a^{1/n} < b^{1/n} \Leftrightarrow a < b$$

Conséquences immédiates

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n \cdot p]{a}$$

$$(\sqrt[n]{a})^r = \sqrt[n]{a^r}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

$$\sqrt[rp]{a^{rq}} = \sqrt[p]{a^q}$$