

1. NOMBRES REELS :
BILAN DE NOTIONS ET DE TECHNIQUES .

4h/s 6h/s

Supposé acquis . Premier contact avec les équations, inéquations, systèmes d'équations linéaires et quadratiques . Principales propriétés des ensembles de nombres $\mathbb{R}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ (VM3; 12,15,19,20,21)

Objectifs . Reprise approfondie des idées et des techniques de base relatives à la résolution et à la discussion d'équations, d'inéquations et de systèmes d'équations linéaires ayant peu d'inconnues .
Maîtrise du lien entre les équations du premier degré et les droites du plan . Fixation des principales propriétés de \mathbb{R} et de ses sous - ensembles privilégiés .

RESOUDRE DES EQUATIONS, DES INEQUATIONS ET DES SYSTEMES .

En troisième, nous avons rencontré une foule d'équations et d'inéquations . Voici des exemples

- | | |
|---------------------------------------|--|
| 1) $3x + 5 = 0$ | 5) $x^3 - 2x^2 - 1 = 0$ |
| 2) $3x > -5$ ou $3x + 5 > 0$ | 6) $x^2 + 3x + 2 = 0$ |
| 3) $ax + b = 0$ $a, b \in \mathbb{R}$ | 7) $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x = 2y + 1 \end{cases}$ |
| 4) $ax + b < 0$ $a, b \in \mathbb{R}$ | |

En 1) nous reconnaissons une équation linéaire ou équation du premier degré, en 2) une inéquation linéaire . En 3) nous avons l'équation générale du premier degré dont toute autre équation du premier degré est un cas particulier . De même 4) livre l'inéquation générale du premier degré . En 5) et 6) nous observons des équations du troisième et du deuxième degré . En 7) nous voyons un système de deux équations linéaires à deux inconnues . Ce vocabulaire doit devenir familier .

Dans l'étude des équations et des inéquations, dans leur formation, la notion peut-être la plus fondamentale est celle de FONCTION . Une \mathbb{R} - \mathbb{R} fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ associe à tout réel x , au plus un réel $f(x)$. Les éléments x de \mathbb{R} pour lesquels $f(x)$ est défini, constituent le domaine de définition de f , noté Dom f .

Exemples . Dans 1) à 7) ci-dessus, toutes les fonctions utilisées sont des polynômes et le domaine de définition d'un polynôme est toujours \mathbb{R} .

La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto \frac{1}{x}$ admet le domaine \mathbb{R}_0

La fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; y \mapsto \sqrt{y - 1}$ admet le domaine $[1, \infty[$.

A une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nous associons un graphique constitué de l'ensemble des points du plan, de coordonnées $(x, f(x))$ où $x \in \text{Dom } f$. C'est encore l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ où $y = f(x)$. Ceci est l'équation du graphique . En pratique, les

2.

graphiques de fonctions familières sont des courbes . Jusqu'ici nous avons surtout obtenu des tracés de graphiques en donnant des valeurs à x et en reportant les points $(x, f(x))$ sur un dessin . C'est un tracé par points . Durant les deux années qui viennent nous allons progressivement acquérir des méthodes qui permettent une étude globale du graphique et qui procèdent moins en aveugle .

Exemples

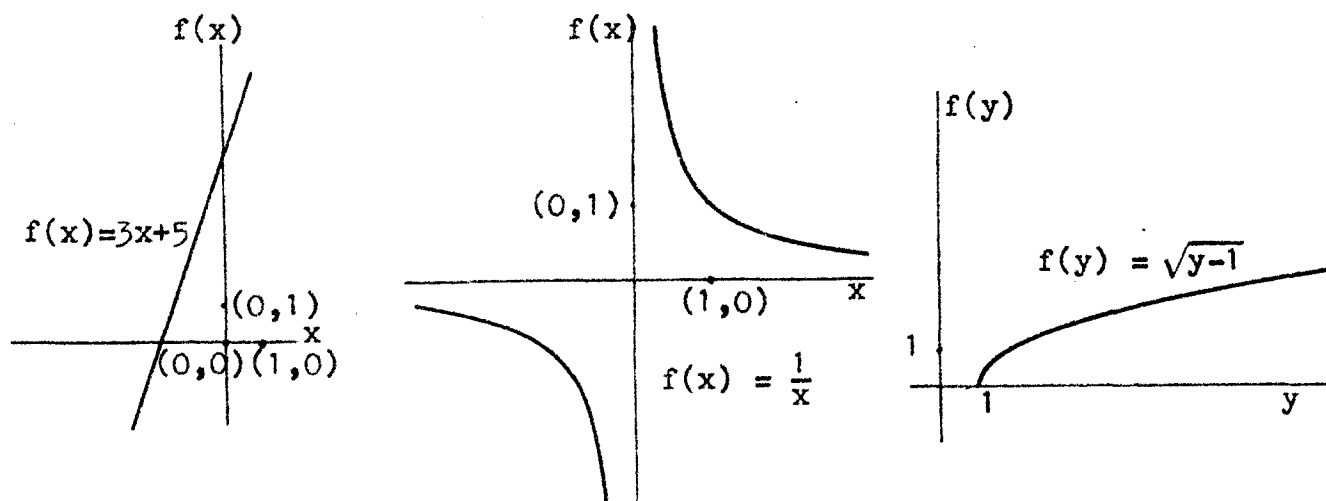


Figure 1.

Comment s'effectue le passage d'une fonction à une équation ? A toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, nous associons une équation

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

Remarques 1) Il ne faut pas confondre (1) avec l'équation $y = f(x)$ du graphique, discutée plus haut .

2) D'autres équations telles que $f(x) = 7$ peuvent être associées à f mais elles se ramènent à (1) par $f(x) - 7 = 0$ et par l'introduction d'une nouvelle fonction .

La solution de l'équation (1) ou Sol (1) est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels $f(x) = 0$

C'est aussi l'ensemble des points (x,y) du plan tels que

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$$

qui est un système dont la solution est l'intersection du graphique de f avec l'axe $y = 0$

Exemples 1) $3x + 5 = 0$ (figure 1) possède une solution constituée par le réel $-5/3$, ce qui se voit approximativement sur le graphique

2) $\frac{1}{x} = 0$ a une solution vide ; aucun réel ne vérifie cette équation (figure 1)

3) $\sqrt{y - 1} = 0$ possède la solution $y = 1$ (figure 1)

4) $x^2 - 1 = 0$ donne lieu à l'interprétation graphique suivante

La solution $Sol = \{-1, 1\}$
y apparaît clairement .

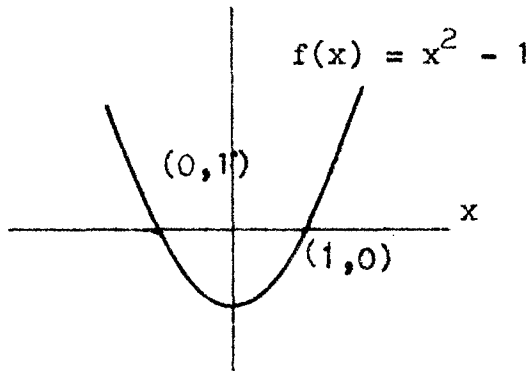


Figure 2.

A une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s'associe de même, une inéquation
 $f(x) \geq 0$ (ou $f(x) > 0$ ou $f(x) \leq 0 \dots$)

dont la solution est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels $f(x) \geq 0$.
Celle-ci peut se déterminer par un calcul ou l'aide du graphique .

Exemples 1) $3x + 5 > 0$ Le graphique de $3x + 5$ livre la solution
 $] -5/3, \infty[$ (voir figure 1)

2) $\frac{1}{x} \leq 0$ Le graphique de $\frac{1}{x}$ montre que la solution est $] -\infty, 0[$
(voir figure 1)

3) $\sqrt{y - 1} \geq 0$ admet la solution $[1, \infty[$ (voir figure 1)

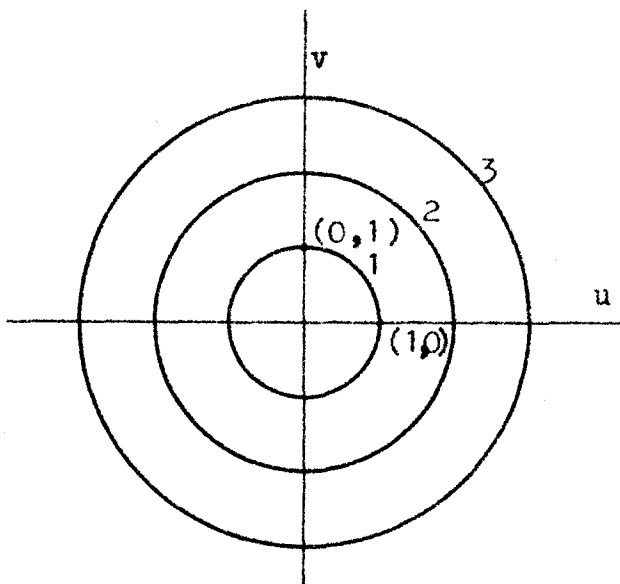
4) $x^2 - 1 > 0$ Le graphique de $x^2 - 1$ montre que la solution est
 $] -\infty, -1[\cup] 1, \infty[$ (voir figure 2)

On peut également étudier des $\mathbb{R}^2 - \mathbb{R}$ fonctions telles que

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (u, v) \rightarrow u^2 + v^2$$

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \rightarrow x^3 - 4y + 5$$

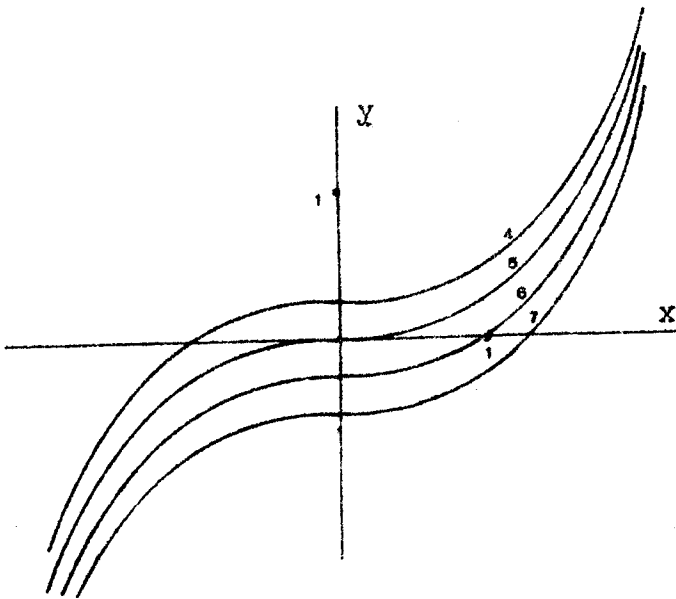
qui donnent lieu à leur tour, à des graphiques dans \mathbb{R}^3 , des surfaces
au lieu de courbes, des domaines de définition, des équations, etc .
(voir figure 3)



Des courbes de niveau
de la fonction

$$(u, v) \rightarrow u^2 + v^2$$

Figure 3.



Des courbes de niveau de la fonction

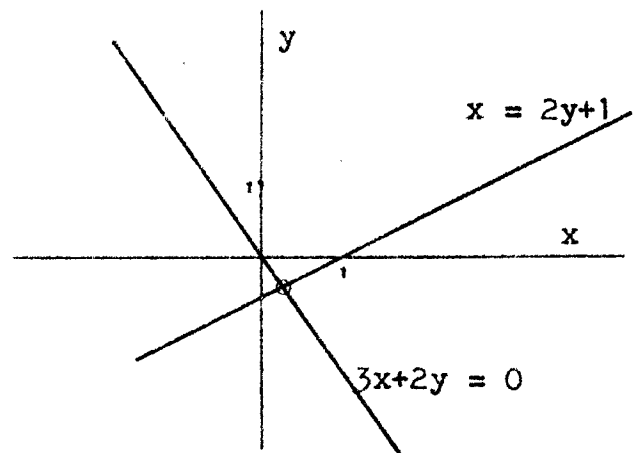
$$(x,y) \rightarrow x^3 - 4y + 5$$

Un système d'équations (ou d'inéquations) est un ensemble d'équations . Il peut s'agir d'une seule équation . Sa solution est constituée par les solutions communes à toutes les équations de l'ensemble . Graphiquement, la solution d'un système apparaît comme l'intersection des graphiques de ses diverses équations . Si le système est constitué d'une seule équation cette intersection est évidemment le graphique de l'équation considérée .

Exemples 1) Nous avons déjà illustré les systèmes $\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$

$$2) \begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x = 2y + 1 \end{cases}$$

conduit à deux droites dont l'intersection livre la solution



On voit que la solution est unique et de la forme (a, b) où $a \in [0, \frac{1}{2}]$ et $b \in [0, -\frac{1}{2}]$. Le calcul permet une précision plus grande .

Qu'entend-on par résoudre une équation, une inéquation et plus généralement un système S ? Cette notion cruciale ne peut être définie d'une manière tout à fait précise . Il faut distinguer l'objectif de la résolution et la méthode . L'objectif de la résolution consiste à donner une description complète de la solution par une propriété qui n'exige plus le recours aux équations de S . La pratique seule

permet de bien comprendre ce que signifie cette demande peu précise . La méthode qui conduit à l'objectif ci-dessus dépend de S et elle est loin d'être unique . La résolution d'équations et de systèmes est un sujet inépuisable, auquel les mathématiciens travaillent depuis 5 000 ans et qui progresse indéfiniment, par l'apparition de nouvelles fonctions . Un de nos buts est de nous faire une idée de cette richesse en découvrant peu à peu de nouvelles fonctions . Un autre but est d'assimiler des techniques de résolution efficaces pour certains types d'équations .

Une des idées communes à toutes les méthodes de résolution est celle d'équivalence de deux systèmes d'équations . Des systèmes d'équations S et S' sont équivalents si $\text{Sol } S = \text{Sol } S'$. La stratégie de résolution d'un système S consiste à remplacer S par un système équivalent S' plus simple que S et S' à son tour, par un système équivalent plus simple S'' jusqu'à ce qu'on obtienne un système dont l'ensemble solution est déterminé de manière immédiate . Il n'est pas possible d'expliquer de manière précise ce que veut dire "système plus simple" .

Exemple $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x = 2y + 1 \end{cases}$ est équivalent à $\begin{cases} 3(2y + 1) + 2y = 0 \\ x = 2y + 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} 8y + 3 = 0 \\ x = 2y + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -\frac{3}{8} \\ x = 2(-\frac{3}{8}) + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -\frac{3}{8} \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

La solution du système est constituée par l'unique couple

$$(x, y) = \left(\frac{1}{4}, -\frac{3}{8}\right)$$

Une autre écriture de ce calcul est

$$\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x = 2y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(2y + 1) + 2y = 0 \\ x = 2y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8y + 3 = 0 \\ x = 2y + 1 \end{cases} \dots$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = -\frac{3}{8} \end{cases}$$

EXERCICES 1. Trouver le domaine de définition des fonctions suivantes

a) $x^9 - 8x^7 + 39x$

b) $(2x + 3)(6x - 1)(7x + 29)$

c) $\frac{(2x + 3)(6x - 1)}{7x + 29}$

d) $\frac{(x - 1)(x + 2)(x - 3)(x + 4)}{(x + 1)(x - 2)(x + 3)(x - 4)}$

e) \sqrt{x}

f) $\sqrt{2x - 5}$

g) $\sqrt{-x}$

h) $\sqrt{-x + 6}$

i) $\sqrt{(x - 3)(2x + 5)}$

j) $\sqrt{x^2 - 16}$

Observation : pour trouver le domaine de définition d'une fonction on est souvent amené à résoudre une inéquation .

2. Techniques de factorisation

L'équation $AB = 0$ admet pour ensemble solution, la réunion de l'ensemble solution de $A = 0$ et de l'ensemble solution de $B = 0$

$$AB = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$$

De même $ABC = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0 \text{ ou } C = 0$

$$\frac{A}{B} = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ et } B \neq 0$$

$$AB > 0 \Leftrightarrow (A > 0 \text{ et } B > 0) \text{ ou } (A < 0 \text{ et } B < 0)$$

Résoudre par factorisation et représenter les solutions sur une droite coordonnée \mathbb{R}^1

a) $u^2 - 9 = 0$

a') $u^2 - 9 \leq 0$

a'') $u^2 - 9 \geq 0$

b) $a^2 + 3a = 0$

b') $a^2 + 3a < 0$

b'') $a^2 + 3a > 0$

c) $x^2 + 4x + 4 = 0$

c') $x^2 + 4x + 4 \leq 0$

c'') $x^2 + 4x + 4 \geq 0$

d) $x^2 + 9 = 0$

d') $x^2 + 9 < 0$

d'') $x^2 + 9 > 0$

e) $u^3 - 8 = 0$

e') $u^3 - 8 \leq 0$

e'') $u^3 - 8 > 0$

f) $2x^2 + 3x + 1 = 0$

f') $2x^2 + 3x + 1 \leq 0$

f'') $2x^2 + 3x + 1 \geq 0$

g) $2x^9 - 6x^6 + 6x^3 - 2 = 0$

g') $2x^9 - 6x^6 + 6x^3 - 2 \leq 0$

g'') $2x^9 - 6x^6 + 6x^3 - 2 > 0$

h) $(x-1)(x-2)(x-3) = 0$

h') $(x-1)(x-2)(x-3) < 0$

h'') $(x-1)(x-2)(x-3) \geq 0$

i) $\frac{3x+1}{2x} = 0$

i') $\frac{3x+1}{2x} > 0$

i'') $\frac{3x+1}{2x} \leq 0$

j) $\frac{3x(x-2)}{2x+1} = 0$

j') $\frac{3x(x-2)}{2x+1} \leq 0$

j'') $\frac{3x(x-2)}{2x+1} \geq 0$

k) $(x-m)(2x+\frac{m}{3}) = 0$

k') $(x-m)(2x+\frac{m}{3}) < 0$

k'') $(x-m)(2x+\frac{m}{3}) \geq 0$

3. Techniques graphiques (ramener à des intersections de courbes aussi simples que possible ; construire certains graphiques par addition ou multiplication d'autres)

Résoudre graphiquement, de manière approximative

a) $x^5 - x^2 - 1 = 0$

a') $x^5 - x^2 - 1 < 0$

a'') $x^5 - x^2 - 1 \geq 0$

b) $-x^2 + \frac{1}{x} - 2 = 0$

b') $-x^2 + \frac{1}{x} - 2 \leq 0$

b'') $-x^2 + \frac{1}{x} - 2 > 0$

c) $3x = \frac{2}{x}$

c') $3x > \frac{2}{x}$

c'') $3x < \frac{2}{x}$

d) $x^2 - 3x - 4 = 0$

d') $x^2 - 3x - 4 < 0$

d'') $x^2 - 3x - 4 > 0$

e) $x^2 + 1 = 0$

e') $x^2 + 1 < 0$

e'') $x^2 + 1 \geq 0$

Diverses approches sont possibles. Ainsi pour a) on peut chercher à représenter le graphique de $x^5 - x^2 - 1$ avant de le couper par l'axe des x mais on peut aussi, réaliser sur un même dessin, les graphiques de x^5 et de $x^2 + 1$ afin de localiser leurs points d'intersection.

4. Techniques d'approximations successives. Si f est une fonction croissante sur l'intervalle $[a, b]$, si $f(a) < 0$ et si $f(b) > 0$, on peut souvent espérer trouver un point $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$. On obtient alors un encadrement de c par $[a, b]$. En choisissant $p \in [a, b]$ et en calculant le signe de $f(p)$ on obtient un encadrement meilleur.

Déterminer une solution approchée au 0,1 près par défaut, en utilisant une calculatrice, pour les équations a) b) c) de l'exercice 3.

5. Résoudre dans \mathbb{N} ou \mathbb{N}^2

a) $x^5 + x^2 - 36 = 0$

b) $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 1$

c) $3x + 5 = 0$

d) $x + 2 = 0$

e) $\frac{1}{x} = x$

e) $x^2 + y^2 = 25$

But de cet exercice : faire réfléchir et lutter contre le conditionnement dû à la fréquentation de \mathbb{R} .

FONCTIONS DU PREMIER DEGRE

Le lien entre fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow ax + b$ et droites du plan a été graduellement éclairci depuis la première année.

Aujourd'hui, il convient de l'assimiler définitivement. Voici les principales étapes de la question.

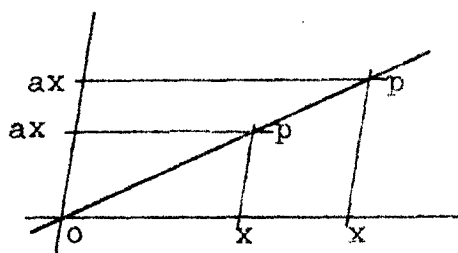
1) Nous avons rencontré la notion de proportionnalité.

Une \mathbb{R} - \mathbb{R} fonction f est une proportionnalité, si le rapport $\frac{f(x)}{x}$ ne dépend pas de x , c'est à dire si $\frac{f(x)}{x} = c$ où c est une constante ou encore si $f(x) = cx$.

Les tracés de graphiques par points, ont montré que les graphiques de telles fonctions sont des droites par l'origine. Cette observation a été renforcée par une démonstration utilisant les homothéties.

2) Théorème. Dans un repère affiné du plan, le graphique d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow ax$ $a \in \mathbb{R}$ est une droite passant par l'origine.

Démonstration. Soit F l'ensemble des points (x, ax) où $x \in \mathbb{R}$.



Nous devons prouver que F est une droite.

Pour $x = 0$, on voit bien que F passe par o .

Soient $p_1 = (x_1, ax_1)$ et $p_2 = (x_2, ax_2)$ deux autres points de F avec $x_1 \neq 0 \neq x_2$.

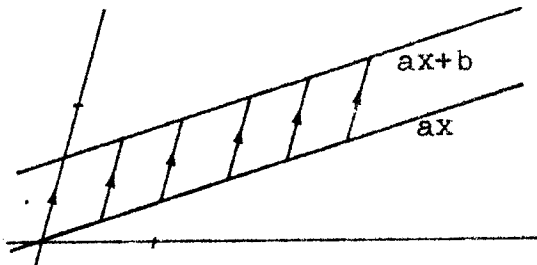
Prouvons que les points p_1, p_2 sont alignés avec o . L'homothétie h de centre o et de

rapport $\frac{x_2}{x_1}$ transforme $(x_1, 0)$ en $(x_2, 0)$ et $(0, ax_1)$ en $(0, \frac{ax_1 x_2}{x_1}) = (0, ax_2)$. Comme h transforme toute droite en une droite parallèle $h((x_1, 0) p_1) = (x_2, 0) p_2$ et $h((0, ax_1) p_1) = (0, ax_2) p_2$

Donc $h(p_1) = p_2$. De ce fait, o, p_1, p_2 sont alignés et F est inclus à la droite op_1 . En outre, tout point $p \in op_1$ est sur F car si $p = (x, y)$, le point $(x, ax) \in F \subseteq op_1$ possède un seul point sur la parallèle à l'axe des ordonnées par $(x, 0)$. Donc $y = ax$

3) Théorème . Dans un repère affini du plan, le graphique d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, est une droite parallèle à la droite d'équation $y = ax$.

Démonstration . Soit F le graphique de f et soit F' le graphique de la fonction $x \rightarrow ax$. Alors F' est une droite par le théorème précédent . La translation $t : (x, y) \rightarrow (x', y')$ où



$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y + b \end{cases}$$

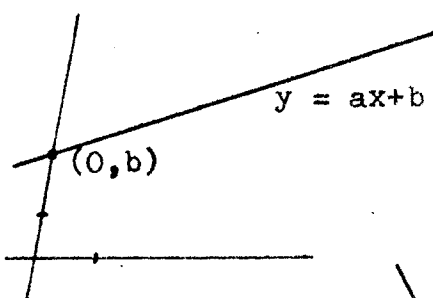
transforme F' en F car (x, ax) devient $(x, ax + b)$. Or une translation transforme toute droite en une droite parallèle .

4) Obtient-on toute droite du plan comme graphique d'une fonction $x \rightarrow ax + b$?

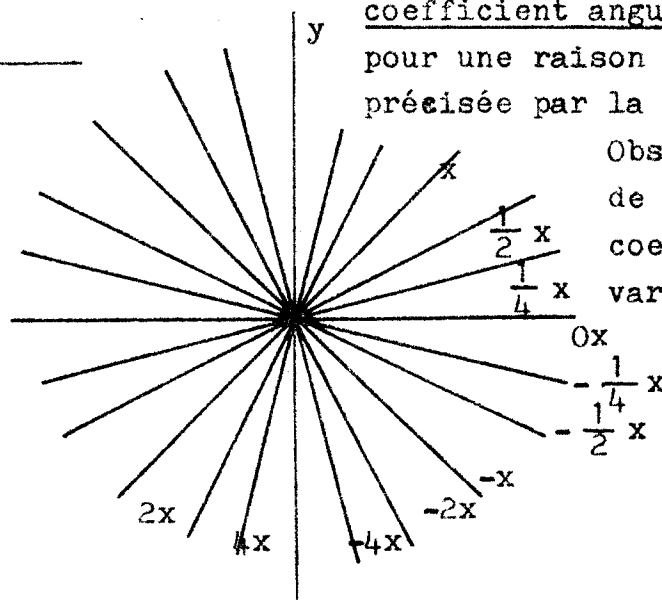
Non . Les droites parallèles à l'axe des ordonnées, ne peuvent être obtenues . Elles ont une équation $x = c$, $c \in \mathbb{R}$. Mais toute autre droite s'obtient de la sorte . Prouvons-le .

Soit D une droite non parallèle à l'axe des ordonnées . Alors D coupe les droites $x = 0$ et $x = 1$ en des points $(0, b)$ et $(1, c)$ respectivement . La fonction $x \rightarrow (c - b)x + b$ admet pour graphique une droite E passant par $(0, b)$ et $(1, c)$. Comme $E \cap D$ comprend deux points, on a $E = D$.

5) Quelle est la signification géométrique des paramètres a, b dans l'équation $y = ax + b$ d'une droite D ? On vient de voir que b détermine l'intersection $(0, b)$ de la droite D avec l'axe des ordonnées .



Et a ? On a vu que si a demeure constant, la droite varie parallèlement à elle-même . Donc a détermine la direction de la droite . On l'appelle coefficient angulaire de la droite , pour une raison qui sera encore précisée par la suite



Observons un dessin de droites ayant des coefficients angulaires variés .

6) Conclusions . Toute fonction du premier degré ou fonction linéaire

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow ax + b \quad a, b \in \mathbb{R}$$

admet pour graphique dans \mathbb{R}^2 une droite passant par $(0, b)$. Le paramètre a est le coefficient angulaire de la droite . Ainsi les droites d'équation $y = ax + b$ et $y = ax + c$ sont parallèles . Dans le plan muni d'un repère affini, toute droite admet soit une équation $y = ax + b$ soit une équation $x = c$.

EXERCICES 6. Techniques linéaires

Résoudre de deux manières (calcul et graphique) . Comparer .

- | | | |
|---|--|--|
| a) $4 + 2x = 7$ | a') $4 + 2x > 7$ | a'') $4 + 2x < 7$ |
| b) $5x + 9 = 0$ | b') $5x + 9 \leq 0$ | b'') $5x + 9 \geq 0$ |
| c) $\frac{6x}{5} = -7$ | c') $\frac{6x}{5} > -7$ | c'') $\frac{6x}{5} \geq -7$ |
| d) $0,95 - 3,5x = 6,5$ | d') $0,95 - 3,5x \geq 6,5$ | d'') $0,95 - 3,5x < 6,5$ |
| e) $4x - \frac{1}{3} = 0,4 - \frac{x}{2}$ | e') $4x - \frac{1}{3} \geq 0,4 - \frac{x}{2}$ | e'') $4x - \frac{1}{3} \leq 0,4 - \frac{x}{2}$ |
| f) $5(x-0,1) = 0,2x + \frac{1}{5}$ | f') $5(x-0,1) \geq 0,2x + \frac{1}{5}$ | f'') $5(x-0,1) \leq 0,2x + \frac{1}{5}$ |
| g) $0,8(x+1) = 0,8(x-1)$ | g') $0,8(x+1) < 0,8(x-1)$ | g'') $0,8(x+1) > 0,8(x-1)$ |
| h) $\frac{4(3x-0,3)}{6} = 0,3 - \frac{3(x+0,1)}{5}$ | h') $\frac{4(3x-0,3)}{6} < 0,3 - \frac{3(x+0,1)}{5}$ | h'') $\frac{4(3x-0,3)}{6} \geq 0,3 - \frac{3(x+0,1)}{5}$ |
| i) $9x - b = 0$ | i') $9x - b > 0$ | i'') $9x - b \leq 0$ |
| j) $9x + b = 0$ | j') $9x + b < 0$ | j'') $9x + b \geq 0$ |
| k) $ax + 3 = 0$ | k') $ax + 3 \geq 0$ | k'') $ax + 3 < 0$ |
| l) $ax - 3 = 0$ | l') $ax - 3 \leq 0$ | l'') $ax - 3 < 0$ |
| m) $ax - b = 0$ | m') $ax - b > 0$ | m'') $ax - b \leq 0$ |
| n) $ax + b = 0$ | n') $ax + b < 0$ | n'') $ax + b < 0$ |

7. Tracer les droites passant par les points suivants et former leur équation .

- | | | |
|----------------------|------------------------|----------------------|
| a) (1, 2) et (-3, 4) | b) (0, 0) et (4, 3) | c) (1, 0) et (0, 2) |
| d) (2, 0) et (0, 2) | e) (1, 1) et (2, -2) | f) (0, 1) et (1, 0) |
| g) (0, -1) et (1, 0) | h) (0, -1) et (-1, 0) | i) (0, 1) et (-1, 0) |
| j) (2, 1) et (-1, 2) | k) (-2, -1) et (-1, 0) | l) (3, 0) et (3, 5) |
| m) (2, 7) et (-3, 7) | n) (4, 3) et (4, 3) | |

Remarque. Confronté à la droite passant par (1, 2) et (3, 4) par exemple on devrait s'exercer à observer que $y = x + 1$ dans chacun de ces cas et qu'il s'agit donc là de l'équation cherchée .

8. Techniques linéaires

a) Considérons la famille des droites du plan coordonné \mathbb{R}^2 représentées par les équations $y = 9x + m$ où $m \in \mathbb{R}$

(1) Dessinez 5 de ces droites sur un même graphique .

Qu'observez-vous ? Etait-ce prévisible ?

(2) Démontrer que toutes les droites de la famille sont parallèles .

b) Considérons la famille des droites du plan coordonné \mathbb{R}^2 représentées par les équations $y = ax + 3$ où $a \in \mathbb{R}$

(1) Dessinez 5 de ces droites sur un même graphique . Qu'observez-vous ? Tenir compte de l'imprécision du dessin .

(2) Démontrer que toutes les droites de la famille passent par un même point $p = (0, 3)$

(3) Toute droite par $p = (0, 3)$ est-elle dans la famille ?

c) Même exercice avec les équations $y = ax - 5$. Le point p a des coordonnées à découvrir .

d) Même exercice avec les équations $y = a(x - 3) + 2$

e) Même exercice avec les équations $y = a(x - p) - q$ où p, q sont fixés et a varie dans \mathbb{R} .

9. Résoudre en utilisant toutes les techniques connues, les systèmes d'équations suivants, dans \mathbb{R}^2 (ou \mathbb{R}^3 pour d)

a)
$$\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 5x - 2 = y \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2u + 7v = 1 \\ u + v = 5 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 2x - y = m \text{ où } m \in \mathbb{R} \\ x + y = 9 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 4u - v + w = 1 \\ u - v = 2 \\ 3u + w = 3 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} x^2 + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 6x + 2y = 14 \end{cases}$$

g)
$$\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 6x + 2y = 0 \end{cases}$$

h)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x^2 - y^2 = 16 \end{cases}$$

i)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 5 = 0 \\ x + y + 5 = 0 \end{cases}$$

j)
$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$$

k)
$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x - 7 \leq 0 \end{cases}$$

l)
$$\begin{cases} x + 2y \leq 3 \\ y \geq 1 \end{cases}$$

10. A et B sont deux villes distantes de 100 kilomètres . Un premier automobiliste quitte A et se dirige vers B à la vitesse de 80 km/h . Au même moment, un second automobiliste quitte B et se dirige vers A à la vitesse de 70 km/h . Déterminer l'heure et l'endroit de la rencontre .

11. Trois frères sont âgés de 10, 16 et 9 ans . Dans combien de temps la somme des âges du premier et du troisième sera-t-elle égale au double de l'âge du deuxième ? (Ne soyez pas trop étonnés par la réponse) .

12. Si on augmente une des dimensions d'un rectangle de trois mètres et l'autre de six mètres, son aire augmente de nonante mètres carrés . Si on diminue la première dimension de cinq mètres et l'autre de dix mètres, son aire diminue de septante mètres carrés . Déterminer les dimensions du rectangle .

13. Un professeur de mathématique distribue des sucettes à ses élèves . S'il en donne 5 000 à chacun, il en manque 12 600 ; s'il en donne 4 000 à chacun, il en reste 5 400 . Déterminer le nombre de sucettes et le nombre d'élèves .

ENSEMBLES STRUCTURES DE NOMBRES .

Nous avons rencontré divers ensembles de nombres tous contenus jusqu'ici dans \mathbb{R} , l'ensemble des réels . Les plus remarquables sont \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{D} , \mathbb{Q} mais il en est d'autres comme \mathbb{R}_0 , \mathbb{R}^+ , \mathbb{D}^+ , les intervalles $[a,b]$, etc .

La structure de \mathbb{R} est déterminée avant tout par les opérations d'addition et de multiplication, par la relation d'ordre et par les propriétés de ces trois notions : associativité, neutre, inverse, commutativité, distributivité, transitivité etc.

Supposons que S soit un sous-ensemble de \mathbb{R} . Dans ce cas, on dispose dans S de la structure d'ordre induite par celle de \mathbb{R} : si a et b sont dans S , on dira que a est plus petit que b dans S , si $a < b$ dans \mathbb{R} . Ceci est banal car valable pour tout sous-ensemble de \mathbb{R} . Voici qui l'est moins .

On dit que S est stable pour l'addition et la multiplication si pour tout choix de a et b dans S , on a forcément

$$a + b \in S \quad \text{et} \quad ab \in S$$

Ceci est le cas des sous-ensembles $\mathbb{N} = \mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$ ainsi que $\mathbb{N} \subset \mathbb{D}^+ \subset \mathbb{Q}^+ \subset \mathbb{R}^+$ et \mathbb{N}_0 , $\mathbb{N}_0 - \{1\}$, $\mathbb{N}_0 - \{1,2\}$, etc .

L'ensemble \mathbb{R}_0 est stable pour la multiplication mais pas pour l'addition . Les ensembles \mathbb{Z}^- , \mathbb{D}^- , \mathbb{Q}^- , \mathbb{R}^- ne sont pas stables . Il existe encore beaucoup d'autres ensembles stables .

Supposons que S soit stable pour l'addition et la multiplication . Dans ce cas, un certain nombre de propriétés de \mathbb{R} sont automatiques dans S . Voici des exemples .

Associativité de $+$ et de \times .

Commutativité de $+$ et de \times .

Distributivité liant $+$ et \times .

$a < b$ si et seulement si $a + c < b + c$ pour tout a, b, c dans S .

D'autres propriétés ne sont pas automatiques . Ainsi :

$S, +$ peut ou non avoir un neutre 0 (\mathbb{N} en possède un, \mathbb{N}_0 n'en possède pas) ;

S, \times peut ou non avoir un neutre 1 (\mathbb{N}_0 en possède un, $\mathbb{N} - \{1,0\}$ n'en possède pas) ;

$S, +$ peut ou non avoir un inverse $-a$ pour tout $a \in S$ (\mathbb{Z} en possède un, \mathbb{N} n'en possède pas) ;

S_0, x peut ou non avoir un inverse a^{-1} pour tout $a \in S_0$ (\mathbb{Q} a cette propriété, \mathbb{Z} et \mathbb{D} ne l'ont pas) ;

On appelle sous-corps de \mathbb{R} un sous-ensemble S ayant toutes les propriétés ci-dessus . C'est le cas de \mathbb{Q} et nous en verrons d'autres exemples .

On appelle sous-anneau de \mathbb{R} un sous-ensemble S ayant toutes les propriétés ci-dessus, sauf peut-être la propriété des inverses multiplicatifs . C'est le cas de \mathbb{Q} , \mathbb{D} , \mathbb{Z} , mais pas \mathbb{N} , ni \mathbb{Q}^+ , ni \mathbb{D}^+ , ni \mathbb{Z}^+ .

Nous voyons donc que \mathbb{Q} est un sous-ensemble particulièrement remarquable . C'est en fait le plus petit sous-corps de \mathbb{R} contenant \mathbb{N} car un tel sous-corps doit contenir $0, 1, 2, \dots, n, \dots$ leurs inverses additifs $-0 = 0, -1, -2, -3, \dots, -n, \dots$ leurs inverses multiplicatifs $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ et les produits $m \times \frac{1}{n} = \frac{m}{n}$ c'est à dire tous les nombres rationnels .

D'autre part, un sous-corps X de \mathbb{R} doit contenir $0, 1$ donc aussi $1 + 1 = 2, 2 + 1 = 3, \dots, n = (n - 1) + 1, \dots$

Par conséquent, tout sous-corps de \mathbb{R} contient \mathbb{Q} .

Ceci est une bonne raison d'aller revoir les règles de calcul dans \mathbb{Q} . (VM3, chap. 12)

En particulier

$$\frac{am}{bm} = \frac{a}{b} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a} \quad \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}$$

Rappelons aussi que les nombres rationnels (éléments de \mathbb{Q}) sont les réels dont le développement décimal est périodique .

Les autres nombres réels sont dits irrationnels (exemples : $\sqrt{2}, \sqrt{3}, 2\sqrt{2}, \sqrt{2} + \sqrt{3}, \dots$)

La structure de \mathbb{R} s'enrichit bien entendu, de diverses notions dérivées de l'ordre, de l'addition et de la multiplication .

Exemples : soustraction, division, moyenne ($\frac{a+b}{2}$), exponentiation (a^b), racine carrée (\sqrt{a}), valeur absolue ($|a|$), etc .

Remarque . Les notions de corps et de sous-corps devraient être bien assimilées à présent . Elles vont jouer un rôle fondamental à diverses occasions : compréhension des résolutions d'équations linéaires, des espaces vectoriels, des nombres complexes .

La notion de sous-anneau et celle d'anneau vont intervenir un peu moins mais elles méritent tout de même un peu d'attention pour leur rôle unificateur un matière de polynômes, matrices, fonctions, nombres entiers .

EXERCICES . 14. Valeurs absolues . On se souvient que $|6| = 6$, $|-6| = 6$
 $|0| = 0$ et

pour tout $x \in \mathbb{R}$	$ x =$	x si $x \geq 0$
		$-x$ si $x \leq 0$

a) Démontrer (pour tout $x, y \in \mathbb{R}$)

- 1) $|-x| = |x|$
- 2) $x \leq |x|$
- 3) $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$
- 4) $|x| \leq y \Leftrightarrow -y \leq x \leq y$
- 5) $|x + y| \leq |x| + |y|$
- 6) $|x - y| \leq |x| + |y|$
- 7) $|xy| = |x||y|$ (tiens un morphisme)

b) Résoudre les équations et inéquations

- | | |
|--------------------|------------------------|
| 1) $ x - 4 = 5$ | 1') $ x - 4 \geq 5$ |
| 2) $ 6 - 3x = -2$ | 2') $ 6 - 3x \geq -2$ |
| 3) $ 3x = 2x - 1$ | 3') $ 3x < 2x - 1$ |
| 4) $ x - 1 = 4$ | 4') $ x - 1 < 4$ |

c) Représenter graphiquement les fonctions f et g et résoudre l'équation $f(x) = g(x)$

- | | |
|-----------------------------|----------------------------|
| 1) $f(x) = x $, | g(x) = 3 |
| 2) $f(x) = 2x + 1 $, | g(x) = $ x - 3 $ |
| 3) $f(x) = x + x - 1 $, | g(x) = $ x + 1 $ |
| 4) $f(x) = 2x - 1 $, | g(x) = $ x + 1 - x - 2 $ |

d) Représenter graphiquement

- | | |
|--|---------------------------------|
| 1) $y = \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ | 2) $y = \frac{\sqrt{x^2}}{ x }$ |
| 3) $y = x + \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x+1)^2}$ | 4) $y = \sqrt{(x-1)^2(2x+3)^2}$ |

15. Stabilité . Voici des sous-ensembles S de \mathbb{R} .

Lesquels sont stables pour l'addition et la multiplication ?

Lesquels sont des sous-corps des sous-anneaux ?

- a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$
- b) $3\mathbb{Z} = \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\}$
- c) $\mathbb{Q}(\sqrt{n}) = \{a + b\sqrt{n} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ si $n \in \mathbb{Z}$ et n n'est pas carré
- d) $m\mathbb{Z} = \{mz \mid z \in \mathbb{Z}\}$ où $m \in \mathbb{Z}_0$ dans \mathbb{Z}
- e) \mathbb{I} = ensemble des nombres irrationnels
- f) L'ensemble des nombres non décimaux : $\mathbb{R} - \mathbb{D}$
- g) L'ensemble des nombres rationnels $\frac{a}{2^n}$, $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$
- h) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$
- i) $\mathbb{Z}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$

4.

16. Puissances. a^z est défini pour tout réel $a \neq 0$ et tout entier z . Lesquelles des propriétés suivantes sont toujours vraies ?

- a) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ b) $(a/b)^n = a^n/b^n$ c) $(a^n)^m = a^{n^m}$
d) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ e) $a^{n^m} = a^{(n^m)}$ f) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
g) $a^n \cdot a^m = a^{nm}$ h) $a^0 = 0$ i) $a^0 = 1$
j) $(a^n)^m = a^{nm}$

17. Simplifier les expressions suivantes

a) $\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{x^2}\right) : \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) =$
 $4 - 2x + x^2 - \frac{x^3}{x+2}$

b) $\frac{4 - 2x + x^2 - \frac{x^3}{x+2}}{1 + \frac{4}{x^2 - 4}} =$

c) $\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) =$

d) $\frac{a^2 + 3a + 2}{a^2 + 2a} - \frac{4a}{a^2 - 1} + \frac{a^2 + a}{a^3 - a^2} - \frac{4}{a^2 - 1} - \frac{a - 3}{a - 1} =$

e) $\left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{3+x^2}{1+3x^2}\right) : \left(\frac{1}{x} - \frac{2x(3+x^2)}{(1+x^2)(1+3x^2)}\right) =$

f) $-(-\frac{1}{2})^2 =$; $-(-\frac{1}{2})^3 =$; $-(-\frac{1}{2})^{-2} =$; $-(-\frac{1}{2})^{-3} =$; $(-\frac{1}{2})^n =$ $n \in \mathbb{Z}$

g) $\left(\frac{64 \cdot 27}{2^6 \cdot 3^5}\right)^{-2} =$

h) $\left[(-\frac{2}{3})^3 : \frac{2^4}{3^5}\right] + \frac{1}{6} =$

i) $12 \cdot 10^7 =$; $12 \cdot 10^{-7} =$; $0,6 \cdot 10^{-8} =$; $0,0004 \cdot 10^5 =$

RESUMEFonctions

Une \mathbb{R} - \mathbb{R} fonction associe à tout réel x , au plus un réel $f(x)$

Exemple : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow 3x - 1$

Une \mathbb{R}^2 - \mathbb{R} fonction associe à tout couple (x,y) , au plus un réel $f(x,y)$

Exemple : $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x,y) \rightarrow 2x^2 + y$

Une \mathbb{R}^3 - \mathbb{R} fonction associe à tout triple (x,y,z) , au plus un réel $f(x,y,z)$

Exemple : $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : (x,y,z) \rightarrow 2x + 3y - z$

Une fonction affine ou fonction du premier degré est une fonction d'une variable réelle de la forme :

$$x \rightarrow ax + b \quad \text{où } a, b \in \mathbb{R} \text{ et } a \neq 0$$

Domaine de définition d'une fonction

Le domaine de définition d'une fonction est constitué de tous les éléments x de \mathbb{R} pour lesquels $f(x)$ est défini .

Graphiques de fonctions .

- Le graphique d'une fonction est constitué de l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x, f(x))$ où $x \in \text{Dom } f$ ou l'ensemble des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ où $y = f(x)$.

- $y = f(x)$ est l'équation du graphique .

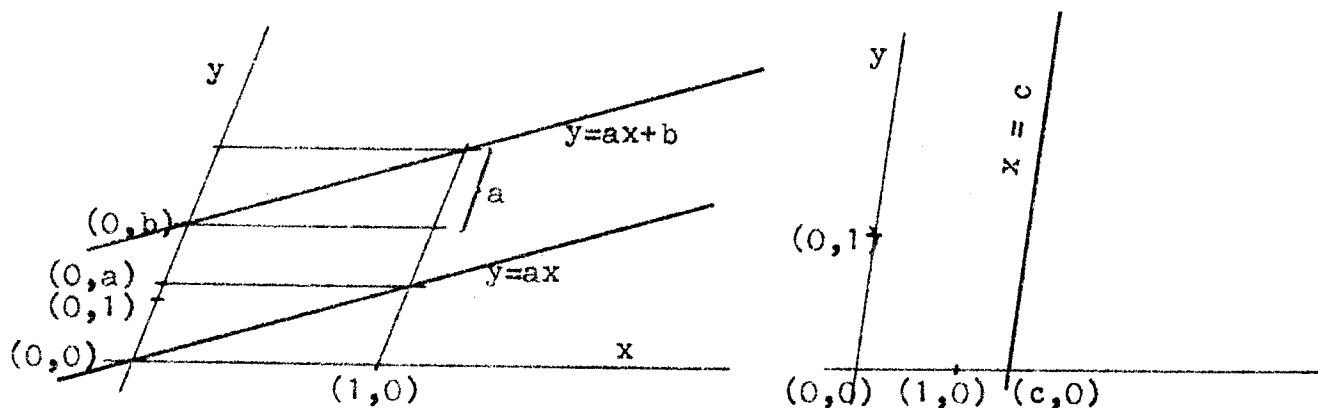
- Les graphiques de fonctions familières sont des courbes .

- Le graphique d'une fonction affine $x \rightarrow ax + b$ où $a, b \in \mathbb{R}$ est une droite

- Toutes les droites d'équation $y = ax + b$ où a demeure constant et b varie sont parallèles .

- Toutes les droites d'équation $y = ax + b$ où a varie et b demeure constant passent par le point $(0, b)$.

- Toute droite du plan est représentée par une équation $y = ax + b$ ou $x = c$



Equations

Si f est une fonction, l'équation associée est $f(x) = 0$

Les solutions de l'équation sont les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = 0$. C'est aussi l'ensemble des points du plan tels que

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{c'est à dire l'intersection du graphique de } f \text{ avec l'axe des } x.$$

a) Les équations linéaires ou équations du premier degré $ax + b = 0$ où $a, b \in \mathbb{R}$ admettent une seule solution $x = -\frac{b}{a}$ lorsque $a \neq 0$. Pour $a = 0$, l'ensemble des solutions est vide ou \mathbb{R} selon que $b \neq 0$ ou $b = 0$.

b) Des équations de degré plus élevé (que un) peuvent être résolues soit

- en factorisant et en respectant le fait qu'un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul
- graphiquement en partant d'une équation de la forme $f(x) = g(x)$ et en recherchant les intersections des courbes $y = f(x)$ et $y = g(x)$
- par approximations successives. Si f est une fonction croissante sur $[a, b]$, si $f(a) < 0$ et si $f(b) > 0$ alors on peut espérer trouver un point $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$. On améliore l'encadrement $[a, b]$ à l'aide d'une calculatrice.

Inéquations

Si f est une fonction, l'inéquation associée est $f(x) \geq 0$

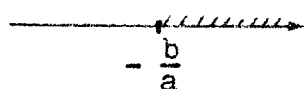
(ou $f(x) > 0$ ou $f(x) \leq 0$ ou $f(x) < 0$).

a) Inéquation linéaire $ax + b > 0$ (1)

$$ax > -b$$

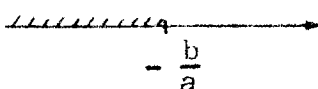
si $a > 0$

$$x > -\frac{b}{a}$$



si $a < 0$

$$x < -\frac{b}{a}$$



si $a = 0$

$$0 > -b$$

- si $b > 0$; $\text{Sol}(1) = \mathbb{R}$
- si $b < 0$; $\text{Sol}(1) = \emptyset$

b) Des inéquations de degré plus élevé (que un) peuvent être résolues soit

- en factorisant et en appliquant le fait qu'un produit est positif s'il a un nombre pair de facteurs négatifs et qu'un produit est négatif s'il a un nombre impair de facteurs négatifs.
- graphiquement en partant d'une inéquation de la forme $f(x) > q(x)$ et en déterminant les zones de plan qui forment la solution
- par approximations successives, on détermine les bornes des intervalles qui forment la solution.

Systèmes d'équations (d'inéquations)

Un système d'équations (d'inéquations) est un ensemble d'équations (d'inéquations)

La solution du système est constituée par les solutions communes à toutes les équations de l'ensemble .

Une idée de base de la résolution d'un système consiste à remplacer un système S par un autre, plus simple S' qui lui est équivalent, S' par S'' qui est plus simple et équivalent à S' .

Deux systèmes sont équivalents s'ils possèdent le même ensemble solution .

Résoudre graphiquement un système, c'est dessiner dans le plan l'ensemble des solutions graphiques de chacune des équations (en général des courbes) et rechercher leurs points d'intersections .

Ensembles structurés de nombres .

Stabilité

Soit S un sous-ensemble de \mathbb{R}

S est stable pour l'addition et la multiplication si pour tout choix de a et b dans S , on a forcément

$$a + b \in S$$

et

$$ab \in S$$

Sous-corps

S , un sous-ensemble de \mathbb{R} est un sous-corps de \mathbb{R} si pour tout $a, b, c \in S$

- $a + b \in S$

- l'addition dans S est associative

- l'addition dans S est commutative

- l'addition dans S possède un neutre 0

- l'addition dans S possède un opposé $-a$

- $ab \in S$

- la multiplication dans S est associative

- la multiplication dans S est commutative

- la multiplication dans S possède un neutre 1

- la multiplication dans S possède un inverse a^{-1}

- la multiplication dans S se distribue sur l'addition

- $a < b \iff a + c < b + c$

\mathbb{Q} est un sous-corps de \mathbb{R}

Tout sous-corps de \mathbb{R} contient \mathbb{Q}

Sous-anneau

Un sous-ensemble S est sous-anneau de \mathbb{R} s'il a toutes les propriétés du sous-corps sauf peut-être la propriété des inverses multiplicatifs .

18.

Valeurs absolues

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| =$

	x	si	$x \geq 0$
	$-x$	si	$x \leq 0$