17. ENCORE DES FONCTIONS . 6h/s

Supposé acquis . Théorie des équations et des polynômes du second degré (chapitres 9 et 11) .

Objectifs : Application de la théorie des polynômes du second degré à la détermination de domaines de définition d'autres fonctions . Egalité de fonctions polynômes .

DOMAINES DE DEFINITION .

Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, nous nous préoccupons avant tout du domaine de définition ou domaine de f . C'est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels $f(x)$ est défini . Examinons quelques exemples en faisant attention aux méthodes utilisées . Celles-ci seront illustrées par l'application de la théorie des polynômes du second degré .

Exemple 1. $\sqrt{x}$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}^+$

Exemple 2. $\sqrt{f(x)}$ est défini pour tout x tel que $f(x) \in \mathbb{R}^+$.
Le domaine de cette fonction se détermine dès lors en résolvant l'inéquation $f(x) \geqslant 0$
Nous nous souvenons qu'à cet effet, il peut être utile voire nécessaire de procéder à une factorisation .

Exemple 3. $\sqrt{\dfrac{x^3 - 8}{x + 2}}$ est défini pour $\dfrac{(x^3 - 8)}{x + 2} \geqslant 0$ ou
$(x^3 - 8)(x + 2) \geqslant 0$ (sauf si $x = -2$) ou
$(x - 2)(x^2 + 2x + 4)(x + 2) \geqslant 0$.
Comme $x^2 + 2x + 4$ n'a pas de racines, la valeur de ce polynôme est strictement positive pour tout x, donc on est ramené à la résolution de $(x - 2)(x + 2) \geqslant 0$
qui livre $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$
Comme la valeur $x = -2$ doit être écartée, le domaine de la fonction donnée est $]-\infty, -2[\cup [2, +\infty[$.

Exemple 4 . $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.
Il y a plusieurs cas à considérer en rappel de la théorie des polynômes du second degré . Soit Dom f le domaine de f .

1) $a > 0$ et $b^2 - 4ac \leqslant 0$ implique que Dom $f = \mathbb{R}$
2) $a > 0$ et $b^2 - 4ac > 0$ implique que $ax^2 + bx + c$ admet deux racines $x_1 < x_2$ et Dom $f =]-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty[$
3) $a < 0$ et $b^2 - 4ac < 0$ implique Dom $f = \emptyset$
4) $a < 0$ et $b^2 - 4ac \geqslant 0$ implique que $ax^2 + bx + c$ admet deux racines $x_1 \leqslant x_2$ et Dom $f = [x_1, x_2]$.

Exemple 5 . $\frac{1}{x}$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}_0$

Exemple 6. $\frac{1}{f(x)}$ est défini pour $f(x) \in \mathbb{R}_0$. Dom $\frac{1}{f(x)}$ est donc déterminé et recherchant Dom f et en résolvant l'équation $f(x) = 0$.

Exemple 7 . $\frac{1}{ax^2 + bx + c}$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, tel que x ne soit pas solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

EXERCICES . 1. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes .

a) $\sqrt{x + 1}$
b) $\sqrt{x^2 + 1}$
c) $\sqrt{x^2}$
d) $\sqrt{-x}$
e) $\sqrt{\sin x}$
f) $\sqrt{-x^2 + 3x - 4}$
g) $\sqrt{3x^2 - 7x + 1}$
h) $\sqrt{x^2 - a}$
i) $\sqrt{\frac{4x - 1}{x + 3}}$
j) $\sqrt{\frac{1 - 4x}{x + 3}}$
k) $\frac{\sqrt{1 - 4x}}{\sqrt{x + 3}}$

2. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes .

a) $\frac{1}{x - 1}$
b) $\frac{1}{x + 1}$
c) $\frac{1}{5x^2}$
d) $\frac{1}{\sin x}$
e) $\frac{1}{x^2 - 3x + 4}$
f) $\frac{1}{x^2 + 1}$
g) $\frac{1}{3x^2 - 7x + 1}$
h) $\frac{1}{\sqrt{x}}$
i) $\frac{1}{x^2 - a}$

EGALITE DE FONCTIONS .

Le professeur tend un piège . Il demande de comparer les fonctions

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longrightarrow x - 1$

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longrightarrow \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

Le sort de la première est rapidement réglé . Son graphique est une droite .
Et la deuxième ? La classe songe à factoriser $x^2 - 1$ en $(x - 1)(x + 1)$ puis à simplifier la fraction
$\frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1}$ par $x + 1$.
Donc concluent certains, $g(x) = x - 1 = f(x)$
Peut-on affirmer que $f = g$? Oui et non .
La fonction g n'est pas définie pour $x = -1$ alors que f l'est .
Donc Dom f $\neq$ Dom g et $f \neq g$.
Mais en se restreignant à Dom $g = \mathbb{R} - \{-1\}$ on a bien $f = g$.
Nous convenons que <u>deux fonctions f, g définies sur un même ensemble E sont égales si et seulement si $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in E$</u> .

Peut-il arriver que deux polynômes distincts f et g de $\mathbb{R}[x]$ soient égaux en tant que fonctions ?
Qu'on ait par exemple

$$300\,019\,x^{27} - 829\,x^{13} + 400 = 7\,x^{119\,119} + 3$$

quel que soit x ? La classe en doute mais comment le prouver ?
Le professeur rappelle une matière vue en troisième (VM3, chapitre 19) :

1) un polynôme non nul $f \in \mathbb{R}[x]$ est divisible par $x - a$ pour $a \in \mathbb{R}$, si et seulement si $f(a) = 0$.
2) un polynôme non nul de degré d dans $\mathbb{R}[x]$ possède au plus d racines .

Supposons à présent, que $f \neq g$ dans $\mathbb{R}[x]$ et que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Alors $f - g$ est un polynôme non nul dans $\mathbb{R}[x]$.
De plus $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Grâce à la propriété 2), il en résulte que $f - g$ est un polynôme nul .
On a donc une contradiction .
Conclusion . Des fonctions définies par deux polynômes distincts ne peuvent être égales .

EXERCICES . 3. Parmi les fonctions suivantes, quelles sont celles qui sont égales sur $\mathbb{R}$

a) $\sqrt{x^2}$ b) x c) $|x|$ d) $\dfrac{x^2}{x}$ e) $\left|\dfrac{x^2}{x}\right|$

4. Les fonctions $\cos(\frac{\pi}{2} - x)$ et $\sin x$ sont-elles égales sur $\mathbb{R}$?