15. ENCADREMENTS .

<u>Supposé acquis</u> . Large expérience des approximations de racines carrées et des incertitudes sur une somme et une différence (VM3, chapitre 21).

<u>Objectifs</u> . Etude des incertitudes sur un produit et un quotient de deux nombres décimaux positifs .

<u>RAPPELS</u> .

Nous avons souvent dû exprimer un nombre réel, de manière approchée . C'est le cas lorsque nous voulons traduire $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{7}$, $\sqrt{2}$, π sous forme décimale . nous disposons de plusieurs notations à cet effet .

Ainsi
$$1,41 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 1,42 \quad (1)$$
$$\sqrt{2} \in [1,41 \ ; \ 1,42] \quad (2)$$
$$\sqrt{2} \approx 1,41 \quad (3)$$
$$\sqrt{2} \approx 1,42 \quad (4)$$
$$\sqrt{2} = 1,415 \pm 0,005 \quad (5)$$

(1) et (2) livrent un encadrement de $\sqrt{2}$

(3) est la valeur approchée à 0,01 près, par <u>défaut</u> de $\sqrt{2}$

(4) est la valeur approchée à 0,01 près, par <u>excès</u> de $\sqrt{2}$

(5) est la valeur de $\sqrt{2}$ avec une <u>incertitude</u> ou <u>marge d'erreur</u> de 0,005 .

Lorsque nous voulons exprimer les mêmes notions pour un nombre réel positif a, nous pouvons utiliser la notation Δa (lire <u>detla a</u>) pour la marge d'erreur et A pour la valeur moyenne approchée de a, donc
$$a = A \pm \Delta a$$
$$a \approx A - \Delta a \quad \text{(valeur de a par défaut)}$$
$$a \approx A + \Delta a \quad \text{(valeur de a par excès)}$$
$$a \in [A - \Delta a, \ A + \Delta a]$$
$$A - \Delta a \leqslant a \leqslant A + \Delta a$$

Ces conventions nous permettent de reprendre une estimation de la marge d'erreur sur une somme ou une différence de deux réels positifs a et b, vue en troisième année, sur des exemples numériques .

Si $a \in [A - \Delta a, \ A + \Delta a]$ et $b \in [B - \Delta b, \ B + \Delta b]$

on a $(A - \Delta a) + (B - \Delta b) \leqslant a + b \leqslant (A + \Delta a) + (B + \Delta b)$

donc $(A + B) - (\Delta a + \Delta b) \leqslant a + b \leqslant (A + B) + (\Delta a + \Delta b)$

ou $a + b = A + B \pm (\Delta a + \Delta b)$

ou $\Delta(a + b) = \Delta a + \Delta b$

<u>Dans une somme de deux réels positifs a et b, la marge d'erreur est la somme des marges d'erreur sur a et sur b</u> .

Passons à la différence . Voyez-vous bien pourquoi nous avons
$$(A - \Delta a) - (B + \Delta b) \leqslant a - b \leqslant (A + \Delta a) - (B - \Delta b) \quad ?$$

Le reste est facile :

$$(A - B) - (\Delta a + \Delta b) \leqslant a - b \leqslant (A - B) + (\Delta a + \Delta b)$$
$$a - b = A - B \pm (\Delta a + \Delta b)$$
$$\Delta(a - b) = \Delta a + \Delta b .$$

Dans une différence de deux réels positifs a et b, la marge d'erreur est la somme des marges d'erreur sur a et sur b .

Une autre convention mérite d'être rappelée . Il est sans doute correct d'écrire $\sqrt{2} = 1,3789 \pm 0,2$ mais ce n'est guère précis . L'approximation est donnée à 10^{-4} près alors que la marge d'erreur est de $2 \cdot 10^{-1}$. En pratique, le bon sens commande de noter la valeur approchée du nombre avec une précision qui ne dépasse pas celle de la marge d'erreur . Ici, on écrira donc $\sqrt{2} = 1,3 \pm 0,2$ ou $\sqrt{2} = 1,4 \pm 0,2$ mais il faut être conscient que cette simplification comporte un risque d'erreur . Un exemple :

$$\frac{2}{3} = 0,67 \pm 0,10$$

mais il est faux d'écrire $\frac{1}{3} = 0,5 \pm 0,1$.

La prudence s'impose ! Vous pensez qu'il faut supprimer cette convention ? Comment faire ? Mieux vaut ne pas ignorer le danger et se souvenir que nos machines commettent constamment ces erreurs d'arrondis .

EXERCICES . 1. Calculer

a) $37,45961 + 8,91377$ à 10^{-3} près par défaut

b) $37,45961 - 8,91377$ à 10^{-2} près par excès .

2. Parmi les égalités suivantes, lesquelles sont correctes ?

a) $\sqrt{2} = 1,51 \pm 0,12$ c) $\pi = 3 \pm 0,1$

b) $\sqrt{3} = 1,3 \pm 0,4$ d) $1/3 = 1 \pm 0,8$

3. On dispose de 10 nombres avec une marge d'erreur de 10^{-7} sur chacun d'eux . Quelle est la marge d'erreur sur leur somme ? Et sur leur différence ?

MARGE D'ERREUR OU INCERTITUDE SUR UN PRODUIT .

Dans VM3, nous avons vu sur un exemple numérique qu'il avait fallu travailler avec une précision de l'ordre de 10^{-3} sur deux nombres a et b afin d'obtenir une précision de l'ordre de 10^{-1} sur leur produit ab .

Abordons une étude théorique de ce phénomène .

Soit $a = A \pm \Delta a$ et $b = B \pm \Delta b$ dans $\mathbb{R}^+$.

Alors $(A - \Delta a)(B - \Delta b) \leqslant ab \leqslant (A + \Delta a)(B + \Delta b)$.

L'écart entre les deux bornes de l'intervalle est

$2(A\Delta b + B\Delta a)$

donc $\boxed{\Delta(ab) = A\Delta b + B\Delta a}$

et $ab = AB + \Delta a\Delta b \pm \Delta(ab)$

En pratique, $\Delta a\Delta b$ est souvent négligeable .

<u>Exemple</u> : $\Delta a = \Delta b = 10^{-4}$, $A \approx 10^5$, $B \approx 10^3$

Alors $AB \approx 10^8$, $\Delta a\Delta b \approx 10^{-8}$ et $\Delta(ab) \approx 10 + 10^{-1} \approx 10$

Si nous travaillons sous l'hypothèse que $\Delta a\Delta b$ est négligeable, cela permet d'écrire $\boxed{ab \approx AB \pm \Delta(ab)}$

On est souvent amené à remplacer l'incertitude ou marge d'erreur Δa par l'<u>incertitude relative</u> $\delta a = \frac{\Delta a}{A}$

Ainsi dans le dernier exemple examiné ci-dessus,

$$\delta a = \frac{10^{-4}}{10^5} = 10^{-9} \qquad \text{et} \qquad \delta b = \frac{10^{-4}}{10^3} = 10^{-7}$$

En pratique, c'est souvent δa qui nous intéresse, bien plus que Δa . Dans une discussion relative à un voyage en voilier, la distance d'Ostende à New-York peut être évaluée avec une marge d'erreur d'une dizaine de kilomètres car elle correspond à une erreur relative de l'ordre de 1/500 . Pour un voyage en voiture de Bruxelles à Ostende une telle marge d'erreur relève par contre de la fantaisie car elle correspond à une erreur relative de l'ordre de 10% .

Pouvons-nous évaluer l'incertitude relative $\delta(ab)$ sur un produit ab ?

On a $\delta(ab) = \frac{\Delta(ab)}{AB} = \frac{A\Delta b + B\Delta a}{AB} = \frac{\Delta b}{B} + \frac{\Delta a}{A}$

ou $\boxed{\delta(ab) = \delta a + \delta b}$

<u>L'erreur relative sur un produit ab est la somme des erreurs relatives sur a et sur b</u> .

<u>EXERCICES</u> . 4. Un mur rectangulaire a des côtés de mesures 135,21 m ± 0,5m et 2,71m ± 0,02m . Quelle est une valeur approchée de l'aire de ce mur, quelle est la marge d'erreur sur cette aire et quelle est la marge d'erreur relative ?

5. Si $a = 19{,}37825$ et $b = 3{,}4901$ calculer ab à 10^{-2} près par défaut .

6. Si une grandeur physique a se mesure en mètres par seconde, l'incertitude sur a se mesure en ... et l'incertitude relative se mesure en ... (compléter la phrase) .

INCERTITUDE SUR UN QUOTIENT .

Soit $a = A \pm \Delta a$ et $b = B \pm \Delta b$ dans $\mathbb{R}^+$.

Alors $\frac{A - \Delta a}{B + \Delta b} \leqslant \frac{a}{b} \leqslant \frac{A + \Delta a}{B - \Delta b}$ (pourquoi ?)

L'écart entre les bornes de cet intervalle est

$$\frac{A + \Delta a}{B - \Delta b} - \frac{A - \Delta a}{B + \Delta b} = \frac{(A + \Delta a)(B + \Delta b) - (A - \Delta a)(B - \Delta b)}{(B - \Delta b)(B + \Delta b)} = \frac{2(A\Delta b + B\Delta a)}{B^2 - (\Delta b)^2}$$

Si nous négligeons $(\Delta b)^2$ ce qui est souvent raisonnable, on voit que

$$\Delta\left(\frac{a}{b}\right) \approx \left(\frac{A}{B}\right) \frac{\Delta b}{B} + \frac{\Delta a}{B} \approx \frac{A\Delta b + B\Delta a}{B^2}$$

De plus $\frac{A}{B}$ peut être considéré comme une bonne valeur approchée de $\frac{a}{b}$, à savoir la moyenne quadratique des bornes $\frac{A - \Delta a}{B + \Delta b}$ et $\frac{A + \Delta a}{B - \Delta b}$ lorsqu'on néglige Δa en regard de A et Δb en regard de B .

L'erreur relative est estimée facilement :

$$\delta(a/b) = \frac{\Delta(a/b)}{A/B} = \frac{\frac{A}{B}\frac{\Delta b}{B} + \frac{\Delta a}{B}}{\frac{A}{B}} = \frac{\Delta b}{B} + \frac{\Delta a}{A} = \delta a + \delta b .$$

<u>L'erreur relative sur un quotient $\frac{a}{b}$ est la somme des erreurs relatives sur a et sur b</u> .

EXERCICES . 7. Le détenteur du record du monde de course à pied sur 100 mètres est l'auteur d'un temps de 9 secondes $\frac{91}{100}$. La distance a été mesurée à 3 centimètres près et le temps à un centième de seconde près . Quelle est la vitesse moyenne du parcours effectué, la marge d'erreur et l'incertitude relative ?

8. Si $a = 19,37825$ et $b = 3,4901$, calculer a/b à 10^{-2} près par excès .

9. Si $a = 17,31 \pm 0,02$, $b = 1,14 \pm 0,01$, $c = 3,72 \pm 0,04$ calculer abc, $\Delta(abc)$, $\delta(abc)$

$\frac{ab}{c}$, $\Delta\left(\frac{ab}{c}\right)$, $\delta\left(\frac{ab}{c}\right)$

RESUME .

Marge d'erreur et incertitude sont des synonymes .

Si A est une valeur approchée du réel positif a avec une marge d'erreur Δa, on a

$$A - \Delta a \leq a \leq A + \Delta a$$

où $A - \Delta a$ est une valeur approchée de a par défaut

$A + \Delta a$ est une valeur approchée de a par excès

La marge d'erreur d'une somme de réels positifs est égale à la somme des marges d'erreur commises sur chaque terme de la somme .

La marge d'erreur d'une différence de réels positifs est égale à la somme des marges d'erreur commises sur chaque terme de la différence .

L'incertitude relative sur un produit de réels positifs est égale à la somme des incertitudes relatives commises sur chaque facteur du produit .

L'incertitude relative sur un quotient de réels positifs est égale à la somme des incertitudes relatives commises sur chaque facteur du quotient .