11. EQUATIONS ET INEQUATIONS DU SECOND DEGRE .

6h/s 4h/s

Supposé acquis . Maîtrise des racines carrées (chap 6) . Contact prolongé avec diverses situations quadratiques : fonctions, équations mises en équations (chap 9) .

Objectifs . Résolution avec discussion, de l'équation générale du second degré par la voie algébrique et par la voie graphique . Etude en parallèle, des inéquations du second degré .

RESOUDRE .

Dans le chapitre 9, nous avons appris à représenter graphiquement les courbes d'équation $y = ax^2 + bx + c$ qu'on appelle paraboles . Toutes ces courbes s'obtiennent à partir de $y = x^2$ par des transformations simples : étirement (qui livre $y = ax^2$), translation (qui livre le cas général) .

Nous avons également appris à résoudre des équations et inéquations

$x^2 - a = 0$; $x^2 - a \geq 0$; $x^2 - a \leq 0$; $x^2 - a > 0$; $x^2 - a < 0$

ou $x^2 = a$; $x^2 \geq a$; $x^2 \leq a$; $x^2 > a$; $x^2 < a$ par des (1)

décompositions en facteurs et par l'exploitation de la règle des signes pour un produit .

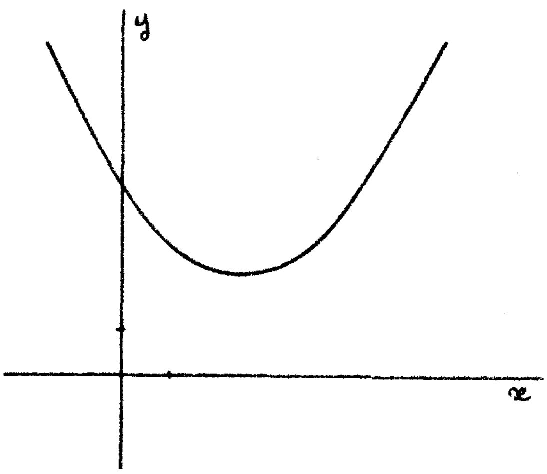
Toutes ces idées se rejoignent dans la résolution des équations et inéquations que voici .

Considérons le polynôme $ax^2 + bx + c$

où a, b, c sont des réels et $a \neq 0$. La représentation graphique nous a montré qu'il convient de distinguer les cas $a > 0$ et $a < 0$.

Si $a > 0$, le polynôme est représenté par une parabole ouverte vers le haut et trois cas peuvent se présenter en ce qui concerne son intersection avec l'axe ox : cette intersection peut être vide, constituée d'un point ou constituée de deux points .

Voici 3 dessins correspondants à ces cas et ce qui arrive à diverses équations et inéquations .



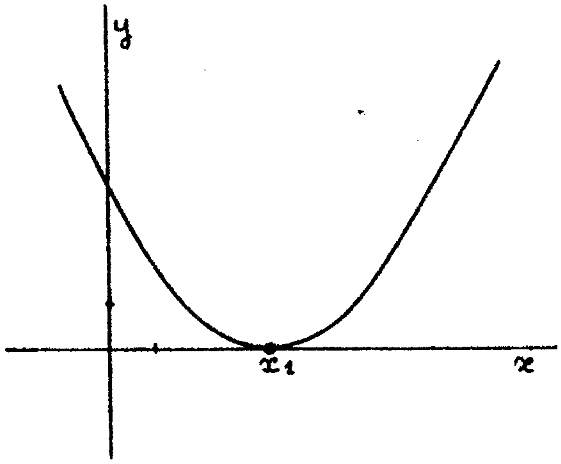
$ax^2 + bx + c = 0$ Sol = $\emptyset$

$ax^2 + bx + c > 0$ Sol = $\mathbb{R}$

$ax^2 + bx + c \geq 0$ Sol = $\mathbb{R}$

$ax^2 + bx + c < 0$ Sol = $\emptyset$

$ax^2 + bx + c \leq 0$ Sol = $\emptyset$



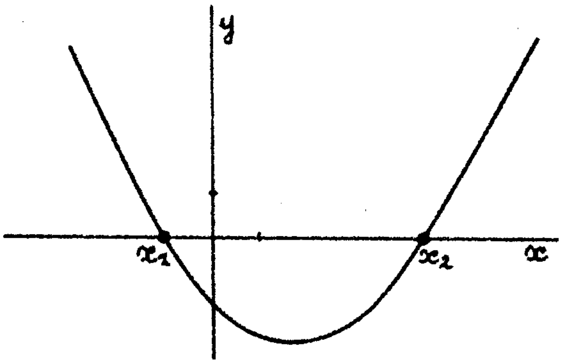
$ax^2 + bx + c = 0$ Sol $= \{x_1\}$

$ax^2 + bx + c \geqslant 0$ Sol $= \mathbb{R}$

$ax^2 + bx + c > 0$ Sol $= \mathbb{R} - \{x_1\}$

$ax^2 + bx + c \leqslant 0$ Sol $= \{x_1\}$

$ax^2 + bx + c < 0$ Sol $= \emptyset$



$ax^2 + bx + c = 0$ Sol $= \{x_1, x_2\}$

$ax^2 + bx + c \geqslant 0$

Sol $=]-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty[$

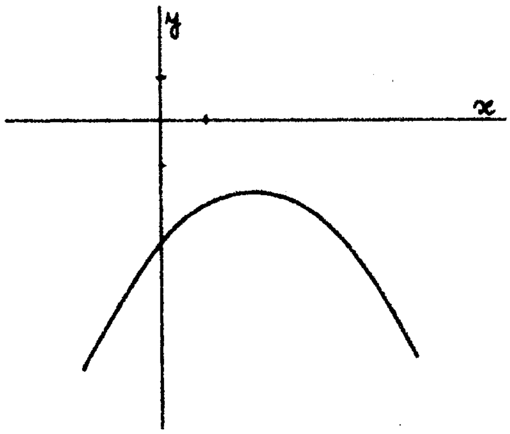
$ax^2 + bx + c > 0$

Sol $=]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[$

$ax^2 + bx + c \leqslant 0$ Sol $= [x_1, x_2]$

$ax^2 + bx + c < 0$ Sol $=]x_1, x_2[$

<u>Si $a < 0$</u>, le polynôme est représenté par une parabole ouverte vers le bas et nous distinguons encore 3 cas pour l'intersection de cette parabole avec l'axe ox .



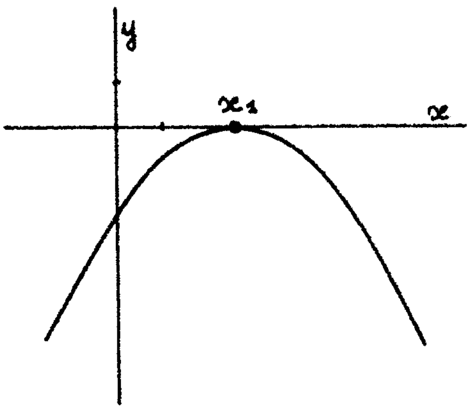
$ax^2 + bx + c = 0$ Sol $= \emptyset$

$ax^2 + bx + c \geqslant 0$ Sol $= \emptyset$

$ax^2 + bx + c > 0$ Sol $= \emptyset$

$ax^2 + bx + c \leqslant 0$ Sol $= \mathbb{R}$

$ax^2 + bx + c < 0$ Sol $= \mathbb{R}$



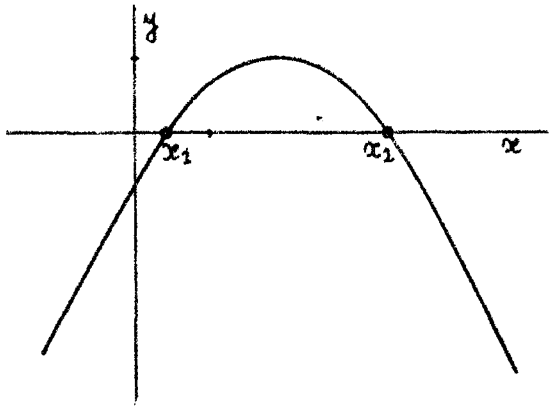
$ax^2 + bx + c = 0$ Sol $= \{x_1\}$

$ax^2 + bx + c \geqslant 0$ Sol $= \{x_1\}$

$ax^2 + bx + c > 0$ Sol $= \emptyset$

$ax^2 + bx + c \leqslant 0$ Sol $= \mathbb{R}$

$ax^2 + bx + c < 0$ Sol $= \mathbb{R} - \{x_1\}$



$ax^2 + bx + c = 0 \quad Sol = \{x_1, x_2\}$

$ax^2 + bx + c \geqslant 0 \quad Sol = [x_1, x_2]$

$ax^2 + bx + c > 0 \quad Sol =]x_1, x_2[$

$ax^2 + bx + c \leqslant 0$

$Sol =]-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty[$

$ax^2 + bx + c < 0$

$Sol =]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[$

Abordons une résolution algébrique de ces équations et inéquations . On se souvient que $A \leqslant B$ implique $-A \geqslant -B$. Ceci nous permet de toujours nous ramener au cas où $a > 0$, dans le polynôme . Nous traitons en parallèle, une équation et une inéquation pour bien montrer qu'un même mécanisme gouverne ces situations .

Rappel : $a > 0$

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff$$
$$a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = 0 \iff$$
$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \iff$$
$$(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0 \iff$$
$$(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

(1)

$$ax^2 + bx + c > 0 \iff$$
$$a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) > 0 \iff$$
$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} > 0 \iff$$
$$(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} > 0 \iff$$
$$(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} > 0$$

(2)

L'inéquation $ax^2 + bx + c < 0$ mène à $(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} < 0$ (3)

Ici une discussion doit intervenir . L'expression $b^2 - 4ac$ qu'on appelle le discriminant de $ax^2 + bx + c$ est-il strictement positif, strictement négatif ou nul ?

1er cas . Discriminant strictement négatif ($b^2 - 4ac < 0$)
Alors (1) et (3) n'ont aucune solution ou si on préfère, leur ensemble de solutions est vide car la différence d'un carré et d'un nombre strictement négatif est strictement positive . En revanche (2) est vérifié pour toute valeur de x .

Donc $b^2 - 4ac < 0$

$$\Longrightarrow Sol\ (ax^2 + bx + c = 0) = \emptyset = Sol\ (ax^2 + bx + c < 0)$$
$$\text{et } Sol\ (ax^2 + bx + c > 0) = \mathbb{R}$$

ou encore,

$$\boxed{\text{si } b^2 - 4ac < 0 \text{ et } a > 0 \text{ alors } ax^2 + bx + c > 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}}$$

De même,

si $b^2 - 4ac < 0$ et $a < 0$ alors $ax^2 + bx + c < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

2ème cas . Discriminant nul ($b^2 - 4ac = 0$)

Alors (1) possède une seule solution $x = -\frac{b}{2a}$

(2) possède la solution Sol (2) $= \mathbb{R} - \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$

(3) n'a pas de solution ou Sol (3) $= \emptyset$

Bref,

si	$b^2 - 4ac = 0$,	$ax^2 + bx + c = 0$	implique $x = -\frac{b}{2a}$
et	$a > 0$	implique $ax^2 + bx + c \geqslant 0$	pour tout $x \in \mathbb{R}$
tandis que	$a < 0$	implique $ax^2 + bx + c \leqslant 0$	pour tout $x \in \mathbb{R}$

3ème cas . Discriminant strictement positif ($b^2 - 4ac > 0$)

Alors nous pouvons procéder par factorisation et reprendre une démarche parallèle pour (1), (2) et (3) .

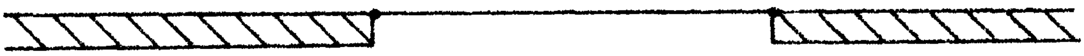
$$(1) \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}\right) = 0$$

ce qui livre deux solutions ou racines .

$$(2) \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}\right) > 0$$

ou

$-\frac{b}{2a} - \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}$ $\qquad$ $-\frac{b}{2a} + \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}$



La solution est constituée par la réunion de deux demi-droites ouvertes disjointes dont l'origine est constituée par les deux racines de l'équation (1)

$$(3) \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}\right) < 0$$

$-\frac{b}{2a} - \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}$ $\qquad$ $-\frac{b}{2a} + \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}$

La solution est constituée par l'intervalle ouvert dont les extrémités sont les racines de l'équation (1) .

Dans tous les cas, nous constatons que les valeurs importantes de x sont les racines

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

qui sont distinctes si $b^2 - 4ac > 0$, confondues si $b^2 - 4ac = 0$ et qui n'existent pas (dans $\mathbb{R}$) si $b^2 - 4ac < 0$

> CONCLUSION : $\qquad y = ax^2 + bx + c$
> a toujours le signe de a sauf pour les valeurs de x égales aux racines ou comprises entre les racines si celles-ci existent .

Revenons un moment au cas où le polynôme admet une ou deux racines x_1, x_2. Alors

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R} \qquad (4)$$

Réciproquement, si $ax^2 + bx + c$ se factorise selon (4), alors les racines sont x_1 et x_2.

Nous observons que

$$\begin{aligned} a(x - x_1)(x - x_2) &= a(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2) \\ &= ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2 \end{aligned}$$

Le travail effectué au chapitre 9 montre que deux polynômes du second degré qui prennent les mêmes valeurs pour tout $x \in \mathbb{R}$, sont égaux. Donc

$$b = -a(x_1 + x_2)$$
$$c = ax_1x_2$$

et

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1x_2 = \frac{c}{a}} \qquad (5)$$

On peut vérifier (5) par une autre voie utilisant les valeurs explicites de x_1 et x_2, soit

$$\boxed{x_1 = -\frac{b}{2a} - \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac} \qquad x_2 = -\frac{b}{2a} + \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}}$$

Ainsi, la somme et le produit des racines d'une équation du second degré sont donnés par des fonctions très simples, des coefficients de l'équation.

EXERCICES. 1. Résoudre (un petit schéma est bien utile)

a) $x^2 - 3x + 2 < 0$
$x^2 - 3x + 2 \geqslant 0$
$x^2 - 3x + 2 \leqslant 0$

b) $-x^2 + 5x - 4 > 0$
$-x^2 + 5x - 4 < 0$
$-x^2 + 5x - 4 \geqslant 0$
$-x^2 + 5x - 4 \leqslant 0$

c) $x^2 + 4x + 4 = 0, \ > 0, \ \geqslant 0, \ \leqslant 0$

d) $-2x^2 + 3x - 7 > 0, \ < 0, \ \leqslant 0, \ \geqslant 0$

e) $(x - 1)(x^2 + 2)(x^2 - 5x + 6) \geqslant 0$

f) $\dfrac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 7x + 12} > 0$

g) $\dfrac{x - 1}{2x - 3} < \dfrac{1}{x + 2}$

h) $\begin{cases} x^2 + x > 0 \\ x^2 + x - 2 < 0 \end{cases}$

2. Résoudre

a) $x(x + 1)^2(x^2 - x - 6) \leqslant 0$

b) $\dfrac{(2x - 5)(2x^2 + 2x - 12)}{(2 - 3x)(-x^2 + 2x - 3)} \geqslant 0$

c) $2x^2 > 3(x - 1)$

d) $1 < x^2 + x + 1 < 3$

e) $\dfrac{x - 2}{x + 1} + x - 2 < 0$

f) $1 < x^2 + x - 2 < 5$

g) $x < x^2 < 1$

h) $\dfrac{2}{x + 1} - \dfrac{1}{x} > 1$

i) $\dfrac{3x + 4}{4x - 1} < \dfrac{6x + 5}{3x + 7}$

j) $\dfrac{x - 1}{x + 1} < \dfrac{x + 1}{x - 1}$

3. Trouver le domaine de définition des fonctions suivantes .

a) $y = \sqrt{x}$

b) $y = \sqrt{x - 1}$

c) $y = \sqrt{1 - x}$

d) $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

e) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 5x + 7}}{\sqrt{- x^2 + 4x}}$

f) $y = x^2 - 3x + \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 5}}$

4. Pour quelles valeurs de a l'équation suivante n'a-t-elle pas de solution ? $x^2 - 3x + a^2 = 0$

5. a) Pour quelles valeurs de m l'équation suivante a-t-elle deux solutions distinctes ?

$$(2m - 1)x^2 - 2x(m - 2) + 3m = 0$$

b) Pour quelles valeurs de m, la somme des racines de cette équation est-elle égale à 25 ?

6. La somme et le produit de deux nombres réels inconnus sont connus . Ces nombres peuvent-ils être déterminés et comment ?

7. Résoudre

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ (suggestion : poser $x^2 = y$)

b) $36x^4 + 5x^2 - 1 = 0$

c) $x^4 + 18x^2 + 81 = 0$

d) $x + \sqrt{x} = 60$

e) $\sqrt{x + 3} - \sqrt{x - 4} = 1$

f) $\sqrt{3x + 1} - \sqrt{4x + 5} + \sqrt{x - 4} = 0$

g) $\sqrt{9x + 4} + \sqrt{3x + 1} = 2x + 1$

h) $\sqrt{7x - 5} + \sqrt{4x - 1} - \sqrt{7x - 4} - \sqrt{4x - 2} = 0$

i) $2x - 1 - 2\sqrt{x(2x - 1)} = 4 - x$

Rappel

$A > B > 0 \Longrightarrow A^2 > B^2$
$A < B < 0 \Longrightarrow A^2 > B^2$
$A < 0 < B$: on ne peut rien affirmer quant au signe de $A^2 - B^2$

j) $\sqrt{7 - x} \leqslant 3$

k) $2x - 1 > \sqrt{x^2 - 3x + 3}$

l) $\sqrt{x + 6} - \sqrt{x + 1} > \sqrt{2x - 5}$

m) $2(2x + 1) > - 3\sqrt{- x^2 - x + 6}$

8. Un fermier possède un terrain rectangulaire qui a pour dimensions 35 mètres et 40 mètres . Il désire border ce terrain d'un chemin de largeur constante qui en fait le tour intérieur . Déterminer la largeur du chemin étant donné que le fermier désire conserver 10,5 ares (un are = 100 mètres carrés) à cultiver à l'intérieur du chemin .

9. Pendant combien de temps faut-il placer 80 000 FB à 10 % pour obtenir 117 128 FB .

10. Calculer la profondeur d'un puits sachant qu'il s'est écoulé 4 secondes entre l'instant où on y laisse tomber une pierre et celui où le bruit de la pierre tombant au fond du puits nous parvient . (on prendra $g = 10\ m/s^2$ et vitesse du son = 340 m/s)

11. Un motocycliste parcourt un trajet de 120 kilomètres à vitesse constante . Au retour, il repart à la même vitesse mais s'arrête à mi-route durant un quart d'heure . Ensuite, il augmente sa vitesse de 20 km/h . Le temps total mis pour le retour sera le même que celui mis pour l'aller . A quelle vitesse a-t-il roulé à l'aller ?

12. L'aire d'un rectangle vaut 15 . La somme des aires des quatre carrés formés sur les côtés de ce rectangle vaut 68 dans la même unité . Quelles sont les mesures de ce rectangle ?

13. On veut faire une boîte sans couvercle avec un morceau de carton rectangulaire de 20 cm sur 12 cm, en enlevant des carrés égaux aux quatre coins . Si le volume de la boîte doit être de 72 cm^3, quel sera le côté du carré à enlever ?

14. La somme de deux capitaux est de 200 000 FB . On les place au même taux . Le premier est retiré après 7 mois et la somme reçue est de 125 600 FB . Le deuxième est repris au bout d'un an et la somme est alors de 86 400 FB . A quel taux étaient-ils placés ?

15. Deux capitaux égaux, placés à intérêts composés l'un à 8 % depuis trois ans et l'autre à 10 % depuis cinq ans, valent ensemble 1 578 622,10 FB . Quels sont les capitaux de départ ?

16. <u>Crime parfait</u> .
Sachant qu'un promeneur se déplace à la vitesse constante v à partir d'un point o déterminé et qu'un pot de fleur tombe en chute libre d'une fenêtre située à une hauteur h au-dessus du sol, à quel moment faut-il lâcher le pot de fleur pour qu'il s'écrase sur la tête du promeneur ? (Réaliser l'exercice avec $g = 10\ m/s^2$)

17. Si $ax^2 + 2b'x + c = 0$ montrer que les racines (si elles existent) sont
$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

18. a) Trouver deux nombres dont la somme S vaut 2 et le produit P vaut -1 .
b) Même question si $S = 2a - 2$ et $P = a^2 - 2a$, $a \in \mathbb{R}$.

19. Décomposer $-a^2 + 5a - 6$ en facteurs .

20. Trouver une équation du second degré dont les solutions sont 2 et 3 .

21. Si $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$ admet la solution s quelle est l'autre solution éventuelle ?

22. A quelles conditions sur a, b, c une équation bicarrée

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

a-t-elle 4 solutions réelles distinctes ?

23. Résoudre

a) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$ b) $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$ c) $m^6 - 19m^3 - 216 = 0$

24. Résoudre mentalement

a) $- 2x^2 + 3x \geq 0$ b) $\frac{- x + 3}{x + 2} \leq 0$

25. Quel est le domaine de définition de la fonction

$x \longrightarrow \sqrt{5x - 2x^2}$?

26. Résoudre $|y^2 - 4| < 4$

27. Déterminer a, b, c pour que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points (1, 0), (2, 1), (3, 6) .

28. Déterminer a, b, c pour que la parabole d'équation $x = ay^2 + by + c$ coupe oy aux points d'ordonnées 1 et -3 et ox au point d'abscisse 3 .

29. Esquisse

$$\frac{(- x - 1)(x^2 + 2)(x - 1 - 2x^2)(2 - x)}{(- x^2 + 16)(- 3x^2 + 15x)(x + 2)}$$

30. Résoudre $\frac{2x^2 + x + 5}{x^2 - 3x + 2} < 0$

31. a) Pour quelles valeurs de m le polynôme $mx^2 + 4x + m + 3$ a-t-il le même signe quel que soit $x \in \mathbb{R}$?

b) Pour quelles valeurs de m a-t-on

$$(m + 2)x^2 - 2mx + 3m < 0 \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R} \ ?$$

32. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ a-t-on

$x^2 + x - 2 > 0$ et $x^2 - 4x + 3 < 0$

33. Pour quelles valeurs de m le polynôme $(m + 1)x^2 - 2mx + m - 3$ a-t-il deux racines strictement négatives ?

34. Pour quelles valeurs de p et q, la fonction $x^2 + px + q$

a) a-t-elle un minimum égal à 3, en $x = 2$

b) s'annulle-t-elle en $x = -1$ et $x = 4$

c) s'annulle-t-elle en $x = 1$ et a-t-elle un minimum en $x = -\frac{1}{2}$?

35. Trouver des entiers a et b tels que

$$\sqrt{7+\sqrt{40}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

DISCUSSION DES RACINES DE L'EQUATION DU SECOND DEGRE

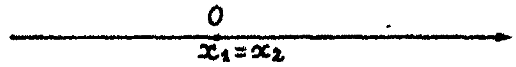
Ce qui suit doit être bien compris, non mémorisé .

Nous appelons ρ , le discriminant $b^2 - 4ac$
P , de produit des racines
S , la somme des racines .

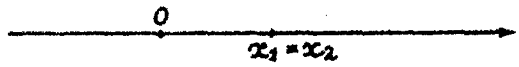
$\rho < 0$ — pas de racines

$\rho = 0$

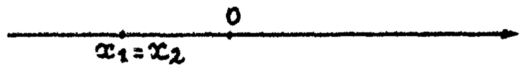
- $P = -\frac{c}{a} < 0$ — impossible
- $P = 0$, $S = 0$



- $P > 0$
  - $S > 0$

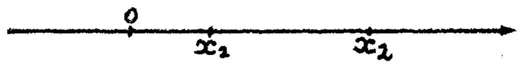


  - $S < 0$

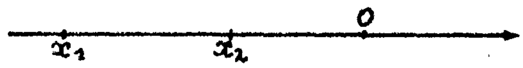


$\rho > 0$

- $P > 0$
  - $S > 0$

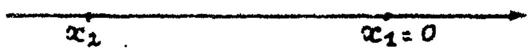


  - $S < 0$

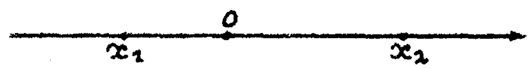


  - $S = 0$ — impossible
- $P = 0$
  - $S > 0$

  - $S < 0$

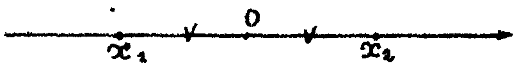


  - $S = 0$ — impossible
- $P < 0$
  - $S > 0$



  - $S < 0$

  - $S = 0$



EXERCICES . 36. Discuter

a) $x^2 - 2(m-1)x + 4m - 7 = 0$

b) $(2m-1)x^2 - 2x(m-2) + 3m = 0$

c) $mx^2 + (m-2)x + m = 0$

d) $mx^2 + (m-2)x - m = 0$

e) $x^2 - 2mx + 2m^2 + m - 6 = 0$

f) $2x^2 - (4m+3)x + 8m = 0$

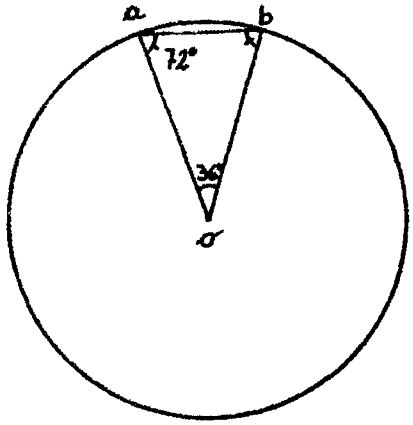
g) $x^2 - 2(m-1)x + 3m^2 + 1 = 4m$

h) $(3-m)x^2 - 4(m+2)x + m = 0$

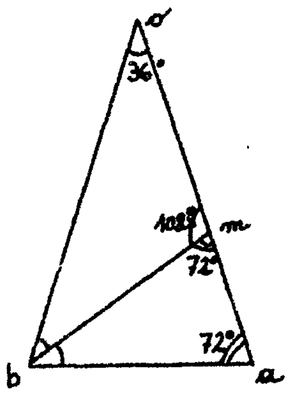
i) $(m-5)x^2 - 4mx + (m-2) = 0$

j) $(m+2)^2x - 2mx + 3m = 0$

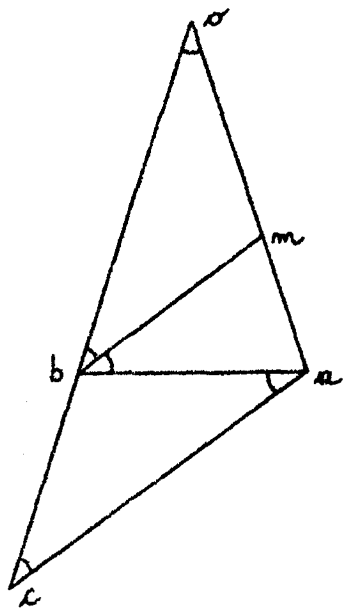
UNE APPLICATION DE L'EQUATION DU SECOND DEGRE .



Considérons un décagone D convexe régulier inscrit dans un cercle de rayon r .
Quelle est la mesure c du côté ?
Il est possible d'utiliser la trigonométrie et une machine pour obtenir une valeur approchée . Mais un calcul exact est à notre portée . Celui-ci livre la clef de nombreuses mesures relatives aux polyèdres réguliers .
Le décagone D détermine un triangle isocèle dont l'angle au sommet vaut 36° alors que les angles de base valent $\frac{180° - 36°}{2} = 72°$
Le fait que 72° = 36° · 2 permet le calcul qui va suivre .
Considérons un triangle isocèle oab tel que $|oa| = |ob| = r$, $a\hat{o}b = 36°$ et $o\hat{b}a = o\hat{a}b = 72°$. Soit m le point de rencontre de la bissectrice en b et de oa .



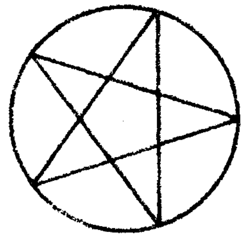
Ceci détermine des triangles isocèles omb et mba car les angles de base de ceux-ci sont égaux . On en déduit que
$|om| = |mb| = |ba|$ (1)
Prolongeons [o, b] à partir de b d'une longueur |ba| ce qui livre un point c .
Comme abc est un triangle isocèle et que
$a\hat{b}c = 180° - 72° = 108°$
on voit que
$b\hat{c}a = b\hat{a}c = \frac{180° - 108°}{2} = 36°$
Donc $o\hat{a}c = 72° + 36°$
$= 108°$
$= o\hat{m}b$



Comme $c\hat{m}b = o\hat{a}c$, les droites mb et ac sont parallèles (utiliser la translation qui transforme m en a) .
De ce fait, le théorème de Thalès s'applique
et $\frac{om}{oa} = \frac{ob}{oc}$ ou $\frac{c}{r} = \frac{r}{r + c}$
qui livre $c(r + c) = r^2$
ou $c^2 + cr - r^2 = 0$
Cette équation du second degré a les solutions
$$c = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 + 4r}}{2} = \frac{-r \pm r\sqrt{5}}{2}$$
Mais $c > 0$ de sorte que $c = \frac{-r + r\sqrt{5}}{2} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

Conclusion . Le côté c d'un décagone convexe régulier inscrit dans un cercle de rayon r mesure $\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$

EXERCICES . 37. a) Déterminer le côté c_5 d'un pentagone convexe régulier inscrit dans un cercle de rayon r .



b) Déterminer le côté d_5 d'un pentagone étoilé régulier inscrit dans un cercle de rayon r .

c) Montrer que $\frac{d_5}{c_5} = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{5}}{2}}$

d) Calculer cos 36° sans utiliser une calculatrice ou une table de valeurs numériques .

38. Sachant que le côté c_6 d'un hexagone convexe régulier inscrit dans un cercle de rayon r est égal à $c_6 = r$, calculer c_3 et c_{12} .

39. Calculer c_4 et c_8 en fonction de r .

RESUME

Résolution de l'équation du second degré $E : ax^2 + bx + c = 0$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$

Soit $\rho = b^2 - 4ac$ le discriminant de $ax^2 + bx + c$

Si $\rho > 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

et Sol $E = \{x_1, x_2\}$ où $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\rho}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\rho}}{2a} \end{cases}$

Si $\rho = 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$

et Sol $E = \{x_1\}$ où $x_1 = \dfrac{-b}{2a}$

Si $\rho < 0$, Sol $E = \emptyset$

Résolution de l'inéquation du second degré $ax^2 + bx + c > 0$ ($\geqslant 0$, < 0, $\leqslant 0$)

Une étude graphique de $y = ax^2 + bx + c$ permet de résoudre aisément cette inéquation .

$y = ax^2 + bx + c$ où a est non nul a toujours le signe de a sauf pour les valeurs de x égales aux racines ou comprises entre les racines si celles-ci existent .

Somme et Produit des racines d'une équation du second degré .

Si $b^2 - 4ac > 0$, on a $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ et

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$