10. SYSTEMES LINEAIRES .

4h/s 6h/s

Supposé acquis . Divers aspects des équations et inéquations du premier degré .

Objectifs . Renforcer le processus de mise en équations . Prendre conscience des équivalences de systèmes et des combinaisons linéaires d'équations .

MISE EN EQUATION .

Exemple 1. Un bateau effectue un trajet de 12 kilomètres en une heure trente en descendant la rivière . Pour revenir, il lui faut six heures . On suppose que la vitesse du bateau serait constante sans la présence du courant . Quelle est cette vitesse du bateau et quelle est celle du courant ?

Nous désignons par x la vitesse du bateau et par y celle du courant, exprimées en km/h .

En descendant la rivière, les deux vitesses s'additionnent donc

$$x + y = \frac{12}{1,5} = \frac{24}{3} = 8$$

En remontant la rivière, les vitesses se soustrayent donc

$$x - y = \frac{12}{6} = 2$$

Voilà la mise en équation . Les deux inconnues x et y satisfont une double contrainte .

$$x + y = 8 \qquad (1)$$

et $$x - y = 2 \qquad (2)$$

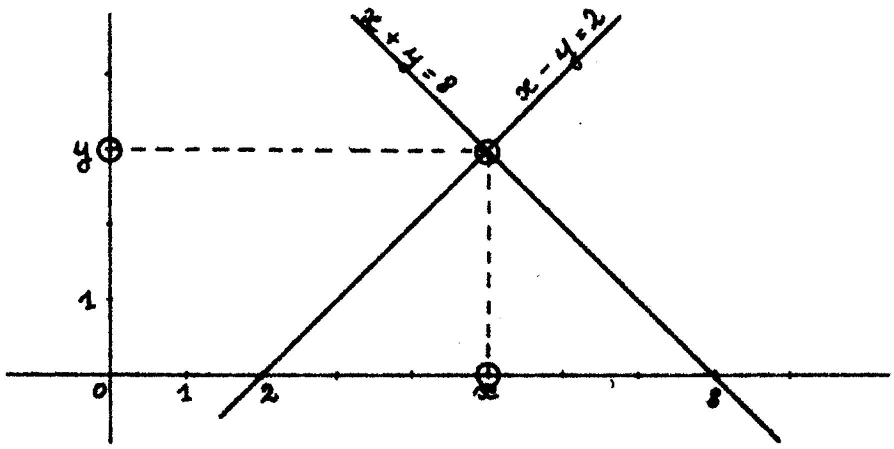
Pour résoudre les équations, le problème peut être oublié . Il suffit d'additionner les équations membre à membre et on obtient

$$(x + y) + (x - y) = 8 + 2$$
$$2x = 10$$
$$x = 5$$

donc $y = 8 - x = 8 - 5 = 3$

La vitesse du bateau est de 5 km/h et celle du courant de 3 km/h .

La résolution peut également être effectuée sur un graphique .



En effet, la solution est forcément un couple (x, y) vérifiant à la fois (1) et (2) . Cette solution est donc un point d'intersection de deux droites .

Un dessin précis offre une solution graphique très lisible, voisine de (5, 3) .

Exemple 2. Eureka !

Le grand Archimède fut chargé d'une mission délicate par le tyran de de Syracuse . Celui-ci s'était fait confectionner une couronne en or mais il soupçonnait l'orfèvre d'avoir mélangé de l'or et de l'argent . D'après la légende Archimède aurait découvert une solution en observant l'allègement des membres dans son bain . Il serait sorti nu dans la rue en criant "EUREKA ! J'ai trouvé !" .

Voici son idée . On mesure l'allègement de l'or plongé dans l'eau et on constate qu'il est d'environ 1/20 . De même la mesure de l'allègement de l'argent est d'environ 1/10 . Une couronne d'or de 40 mesures qui serait plongée dans l'eau ne pèserait plus que 38 mesures . Si elle est constituée d'or et d'argent elle pèsera moins . Supposons qu'elle pèse 37 mesures .

Soit x le nombre de mesures d'or entrant dans la couronne et
y le nombre de mesures d'argent .

Donc $x + y = 40$ (3)

et $\frac{19}{20}x + \frac{9}{10}y = 37$ (4)

Nous en déduisons que $y = 40 - x$

$$\frac{19}{20}x + \frac{9}{10}(40 - x) = 37$$

et $$\frac{19}{20}x + \frac{9 \cdot 40}{10} - \frac{9}{10}x = 37$$

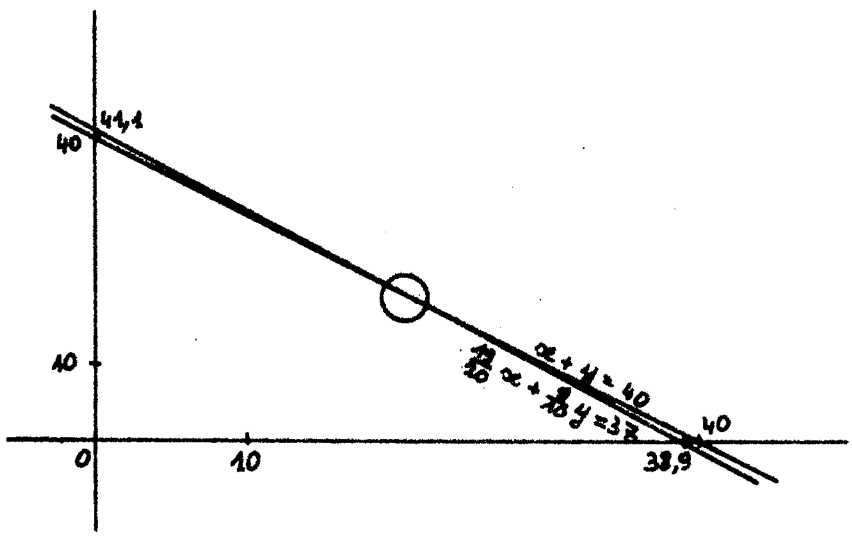
ou $$\frac{1}{20}x + 36 = 37$$

$$\frac{1}{20}x = 1$$

$$x = 20$$

Donc $x = 20$ et $y = 20$. La couronne serait faite pour moitié d'or et d'argent .

Ici aussi , la solution est fournie par le point d'intersection de deux droites d'équation (3) et (4) . Ici une solution précise est plus difficile à obtenir parce qu'il faut soigneusement représenter les fractions $\frac{19}{20}$, $\frac{9}{10}$ et surtout parce que les droites d'équations (3) et (4) font un angle très petit, de sorte qu'une imprécision dans le tracé déporte fortement l'intersection



EXERCICES. 1. Résoudre les problèmes suivants

a) Deux trains d'une longueur de 200 mètres se déplacent sur des voies parallèles. Lorsqu'ils ont la même direction le plus rapide dépasse l'autre en 20 secondes. Lorsqu'ils ont des directions opposées le dépassement s'effectue en 5 secondes. Quelle est la vitesse de chaque train ?

b) Un alliage renferme trois fois plus de cuivre que d'argent et un autre cinq fois plus d'argent que de cuivre. A partir de ces deux alliage, on veut en réaliser un autre ayant une masse de 28 kilogrammes et dans lequel il y a deux fois plus de cuivre que d'argent. Quelle quantité des deux premiers alliages faut-il utiliser ?

2. Utiliser une méthode graphique pour résoudre les systèmes suivants

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -5x + 6y = -12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ 6x - 8y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -5x + 6y = -12 \\ x + y = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 6x + 3y = 12 \end{cases}$ e) $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

SYSTEMES EQUIVALENTS.

Oublions momentanément les questions de mise en équations pour nous concentrer sur la résolution de systèmes d'équations. Reprenons quelques exemples de systèmes.

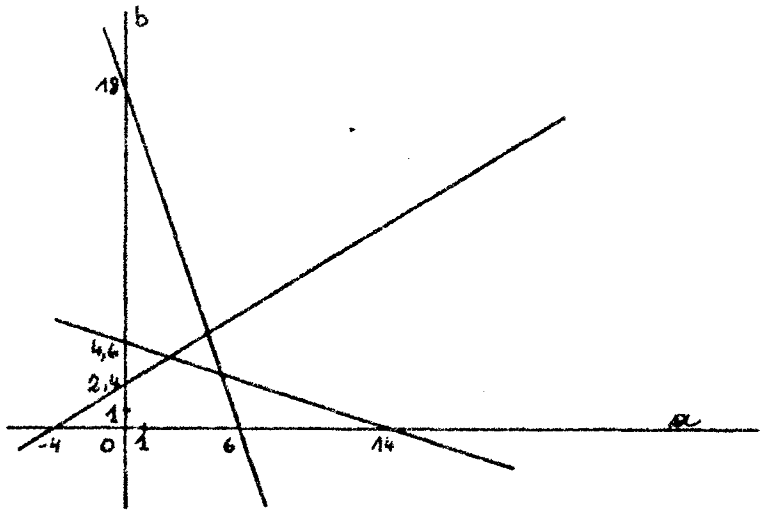
(1) $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x + y = 40 \\ \frac{19}{20}x + \frac{9}{10}y = 37 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x + y = 40 \\ 3x + 3y = 120 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 3a + b = 18 \\ a + 3b = 14 \\ -3a + 5b = 0 \end{cases}$ (5) $\begin{cases} 3a + b = 18 \\ a + 3b = 14 \\ -3a + 5b = 12 \end{cases}$ (6) $\begin{cases} 3a + b - 18c = 0 \\ a + 3b - 14c = 0 \\ -3a + 5b = 0 \end{cases}$

Il s'agit chaque fois d'un système d'équations linéaires. Les systèmes (1), (2), (3) ont deux équations et deux inconnues. Les systèmes (4) et (5) ont trois équations et deux inconnues. Le système (6) a trois équations à trois inconnues. Nous pouvons imaginer et rencontrer des systèmes d'équations linéaires de p équations à q inconnues.

Une solution d'un système dont les inconnues sont x et y est un couple de nombres réels (x, y) vérifiant chacune des équations du système.

Les systèmes rencontrés en pratique ont souvent une seule solution comme (1) et (2) mais ceci n'est pas forcément le cas. Ainsi (3) possède les solutions $x = y = 20$ et $x = 40$ et $y = 0$, parmi d'autres. En examinant ce système graphiquement, nous voyons que les deux



équations qui le composent représentent la même droite. De ce fait <u>ce système a une infinité de solutions</u>.
Le système (5) n'a pas de solution car graphiquement les trois équations que le composent déterminent les droites suivantes et celles-ci n'ont manifestement pas d'intersection.

Nous appelons <u>ensemble solution</u> d'un système d'équations linéaires, l'ensemble des solutions de ce système. Nous écrirons par exemple Sol (3) pour désigner l'ensemble solution du système (3)

Si (S) est un système d'équations linéaires, chacune de ces équations possède un ensemble solution et Sol (S) est l'intersection de ces ensembles solutions.

<u>Résoudre un système (S) c'est obtenir une description explicite et complète de l'ensemble solution de S</u>.
En pratique, la méthode de résolution consiste à remplacer (S) par un système plus simple ayant le même ensemble solution.
On dit que <u>deux systèmes sont équivalents</u> s'ils ont le même ensemble solution.
Comment met-on ce principe en application ?
Prenons le système (1)

(1) $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 2 \end{cases}$ est équivalent à (1)' $\begin{cases} x + y = 8 \\ (x + y) + (x - y) = 8 + 2 \end{cases}$

car $(x, y) \in Sol(1) \Longrightarrow (x, y) \in Sol(1)'$
et $(x, y) \in Sol(1)' \Longrightarrow (x, y) \in Sol(1)$

Le système (1)' devient $\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x = 10 \end{cases}$

qui est équivalent au système $\begin{cases} y = 8 - x \\ x = 5 \end{cases}$

et celui-ci est équivalent au système $\begin{cases} y = 3 \\ x = 5 \end{cases}$ (1)'

Ainsi le système initial est équivalent au système (1) dont l'ensemble solution nous apparaît clairement.
Essayons de dégager le mécanisme de cette équivalence. Toute équation linéaire peut se symboliser par $A = 0$. Un système de deux équations linéaires se symbolise par

$\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

et ce système est équivalent au système

$$\begin{cases} A = 0 \\ pA + qB = 0 \end{cases}$$ où p,q sont des réels et $q \neq 0$.

En effet : $A = 0 = B$ implique bien $pA + qB = 0$.

Réciproquement, $A = 0 = pA + qB$ force $qB = 0$ et comme $q \neq 0$, q^{-1} existe, donc $q^{-1}(qB) = 0$ et $B = 0$.

L'expression $pA + qB$ est une <u>combinaison linéaire</u> de A et de B .

Pour conclure cette section, voici d'autres exemples de systèmes :

2 équations à 3 inconnues $\begin{cases} 3x - 4y + 5z + 1 = 0 \\ x + 3z - 2 = 0 \end{cases}$

3 équations à 2 inconnues $\begin{cases} 2x - 5y + 7 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$

4 équations à 4 inconnues $\begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ a + b - c - d = 0 \\ 2a + b + 2c + d = 0 \\ a - b + 2c + 2d = 1 \end{cases}$

<u>EXERCICES</u> . 3. a) Résoudre les systèmes (2) à (6) en les remplaçant successivement par des systèmes équivalents de plus en plus simples .

b) Vérifier les calculs en les accompagnant par une résolution graphique .

4. Résoudre les systèmes suivants et en vérifier graphiquement l'ensemble solution .

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2a + b = 5 \\ a - 3b = -2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} u + x = -1 \\ 3u - x = 3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 3c + 2d = 2 \\ c - d = 9 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3u - v = 1 \\ 2u + 5v = 41 \end{cases}$

g) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 2 \\ \frac{2}{x} - \frac{2}{y} = 1 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 2s - \frac{v}{2} = \frac{1}{2} \\ \frac{v}{4} + s = -3 \end{cases}$ i) $\begin{cases} 2t = 5 \\ s - 5t = 0 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 0{,}2x - \frac{1}{5}\, y = \frac{3}{4} \\ 0{,}4x - \frac{2}{5}\, y = \frac{3}{2} \end{cases}$ k) $\begin{cases} 5t = t - 2 \\ \frac{3}{2}\, v = 5 - v \end{cases}$ l) $\begin{cases} 4x - y = 4x + y \\ y - 5 = 3(2x - \frac{y}{2}) \end{cases}$

m) $\begin{cases} 3x = 15 + y \\ x - \frac{1}{3}\, y - 5 = 0 \end{cases}$

5. Résoudre les problèmes suivants

a) Un automobiliste effectue un trajet de 720 kilomètres en roulant pendant cinq heures sur une autoroute, et pendant deux heures et demie sur une route ordinaire . Au retour, il emprunte un autre itinéraire de 720 kilomètres et fait quatre heures d'autoroute et quatre heures de route ordinaire. Quelles sont ses vitesses ? On suppose la vitesse sur autoroute constante et de même sur route ordinaire.

b) Des enfants âgés de 5, 7, 9 et 11 ans décident de se cotiser proportionnellement à leur âge pour offrir un livre de 336 F à leur maman. Combien chacun doit-il débourser ?

c) La route d'un col séparant deux villes a une pente constante et égale sur chacun des deux versants. Un cycliste roulant à 10 km/h en montée et 30 km/h en descente met 1h 54 min pour la parcourir. Au retour il met 2h 30 min. Quelle est la longueur de la route sur chacun des deux versants ?

d) Une somme de 650 000 francs est partagée entre un placement à 6 % et un placement à 8 %. Elle rapporte 48 000 francs d'intérêts par an. Quelle est la répartition entre les deux placements qui a été faite au départ ?

UN CASSE - TÊTE QUI N'EN EST PLUS UN !

4		
	5	
8	1	

Nous avons tous soupiré en essayant de résoudre un casse - tête tel que le carré magique ci-contre. Il s'agit d'introduire un nombre dans chaque case de manière que :

- la somme des éléments de chacune des trois lignes, la somme des éléments de chacune des trois colonnes et la somme des éléments de chacune des diagonales soit une même constante. Il est possible d'y passer beaucoup de temps. Avec nos méthodes, une étude systématique des solutions est possible.

Introduisons cinq inconnues pour les nombres à placer dans les cases vides et une inconnue k de plus qui est la constante. Ceci donne la constante k et en outre

4	a	b
c	5	d
8	1	e

$$\left|\begin{array}{l} 4 + a + b = k \\ c + 5 + d = k \\ 8 + 1 + e = k \\ 4 + c + 8 = k \\ a + 5 + 1 = k \\ b + d + e = k \\ 8 + 5 + b = k \\ 4 + 5 + e = k \end{array}\right.$$

Nous obtenons un système de 8 équations à 6 inconnues. Ne soyons pas effrayés : ce système est plutôt simple et il ne faut pas abandonner trop vite.

Remplaçons-le par un système équivalent obtenu en amenant en tête, les équations où figurent moins d'inconnues et en isolant une inconnue dans celles - ci .

$$\begin{cases} e = k - 9 & (1) \\ c = k - 12 & (2) \\ a = k - 6 & (3) \\ b = k - 13 & (4) \\ e = k - 9 & (5) \\ 4 + a + b = k & (6) \\ 5 + c + d = k & (7) \\ b + d + e = k & (8) \end{cases}$$

Nous observons que la première et la cinquième équations sont les mêmes . De ce fait, on peut oublier la cinquième sans inconvénient . De plus, on peut remplacer dans les équations 6, 7, 8, a, b, c, e en fonction de k grâce à 1, 2, 3, 4 .

Ceci livre un nouveau système équivalent

$$\begin{cases} e = k - 9 \\ c = k - 12 \\ a = k - 6 \\ b = k - 13 \\ 4 + (k - 6) + (k - 13) = k \\ 5 + (k - 12) + d = k \\ (k - 13) + d + (k - 9) = k \end{cases}$$

et nous simplifions celui-ci en

$$\begin{cases} e = k - 9 \\ c = k - 12 \\ a = k - 6 \\ b = k - 13 \\ k = 15 \\ d = 7 \\ k + d = 22 \end{cases}$$

On en tire immédiatement :

$$\begin{cases} e = 6 \\ c = 3 \\ a = 9 \\ b = 2 \\ k = 15 \\ d = 7 \end{cases}$$

En vérifiant dans le système initial, on voit qu'il s'agit bien d'une solution à notre problème . Le carré magique recherché est

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Nous avons surtout découvert la résolution de systèmes par substitution : d'une équation on tire une inconnue x en fonction des autres inconnues et on utilise cette information pour écarter x des autres équations .

EXERCICES . 6. Trouver un carré magique complétant dans lequel la constante soit égale à 24 .

	5	
8	10	

7\. a) La somme de deux carrés magiques 3x3 est-elle un carré magique ?

b) Les carrés magiques 3x3 constituent-ils un groupe ?

8. Résoudre les systèmes suivants par substitution

a) $\begin{cases} x + 2y - 32 = -9 \\ x - y + 2z = 17 \\ x - 2y - 2z = -31 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y + 2z = -3 \\ 2x + y + 4z = 3 \\ x + y + 2z = -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ 3x + 4y - z = -2 \\ 4x + 3y + z = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - y/2 + 2z = -3 \\ -2x + y - 4z = 7 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y - z + t = 2 \\ x - y + z - 2t = 3 \\ 2x + y - z - t = 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x - y = 2 \\ x + y = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + y = 6 \\ 3x - 7y = 9 \\ 2x - 8y = 3 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ y + z + u = -2 \\ x + z + u = 6 \\ x + y + u = 2 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x + y + z + v + t = 0 \\ x - y - z + 2v = 4 \\ y - z - v = 4 \\ 3x + 2y - 4v - 3t = 6 \\ 2z + 3v - 6t = 3 \end{cases}$

9. Résoudre les systèmes suivants selon les valeurs prises par les paramètres .

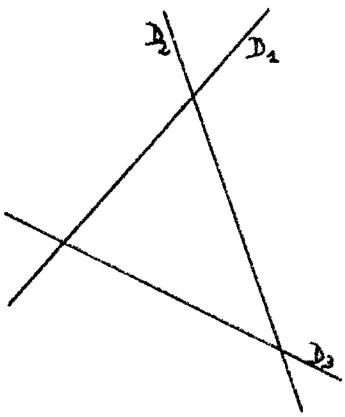
a) $\begin{cases} mx + y = 3 \\ x + my = -3 \end{cases}$ $m \in \mathbb{R}$

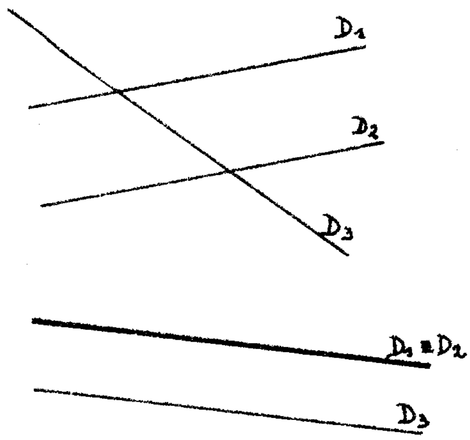
b) $\begin{cases} mx + 2y = 4 \\ mx + (m+1)y = m + 3 \end{cases}$ $m \in \mathbb{R}$

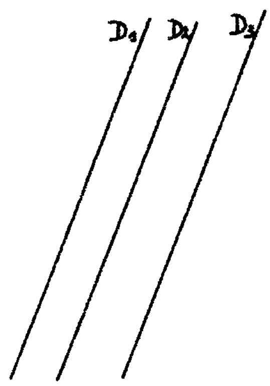
c) $\begin{cases} ax + by = a - 3b \\ a^2x + b^2y = a^2 - 3b^2 \end{cases}$ $a, b \in \mathbb{R}$

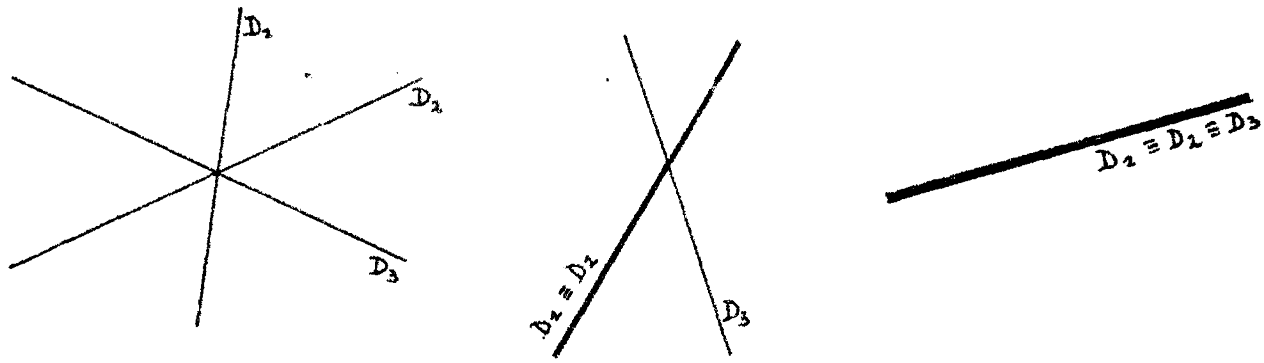
d) $\begin{cases} ax + by = 0 \\ a'x + b'y = 0 \end{cases}$ (système homogène) $a, b \in \mathbb{R}$

10. Systèmes de trois équations du premier degré à trois inconnues
Inventer les équations dont l'interprétation graphique serait la suivante .









11. Pour quelle valeur de λ le système suivant a-t-il une solution unique ?

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ y - x = 1 \\ 2y - x = \lambda \end{cases}$$

<u>SYSTEMES HOMOGENES</u> .

Voici un système linéaire de trois équations à trois inconnues, à résoudre dans $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} ax + by + cz + p = 0 \\ dx + ey + fz + q = 0 \\ gx + hy + iz + r = 0 \end{cases}$$ où $a, b, c, \ldots, p, q, r$ sont des réels .

Ce système est dit <u>homogène</u> si $p = q = r = 0$.

Une <u>solution particulière</u> du système est un triple $(x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ tel que $ax_1 + by_1 + cz_1 + p = 0$, $dx_1 + ey_1 + fz_1 + q = 0$, $gx_1 + hy_1 + iz_1 + r = 0$.

<u>La solution</u> du système est l'ensemble des solutions particulières .

Supposons que le système soit homogène et que (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) sont deux solutions particulières .

Alors toute combinaison linéaire de ces solutions, soit

$$\alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_2, y_2, z_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)$$

est encore une solution du système car

$$a(\alpha x_1 + \beta x_2) + b(\alpha y_1 + \beta y_2) + c(\alpha z_1 + \beta z_2) =$$

$$= \alpha(ax_1 + by_1 + cz_1) + \beta(ax_2 + by_2 + cz_2) = \alpha 0 + \beta 0 = 0$$

et on vérifie les deux autres équations de même .

<u>Exemple</u> :

$$\begin{cases} 3x - y + 5z = 0 \\ -x + \frac{1}{3} y - \frac{5}{3} z = 0 \\ 6x - 2y + 10z = 0 \end{cases}$$

On observe que $(1, 3, 0)$ et $(0, 5, 1)$ sont des solutions particulières . Donc toute combinaison linéaire

$\alpha(1, 3, 0) + \beta(0, 5, 1) = (\alpha, 3\alpha + 5\beta, \beta)$ est encore une solution .

COMMENT GAGNER SA VIE ?

Rappel sur les inéquations linéaires à deux inconnues .

$D \equiv ax + by + c = 0$ divise le plan en trois régions

1) Les points de D où $ax + by + c = 0$
2) Un demi-plan où $ax + by + c > 0$
3) Un demi-plan où $ax + by + c < 0$

Exemple : Résoudre $\begin{cases} x + 7 \geqslant 2y \\ 2x \leqslant y + 4 \\ x + y \geqslant 5 \\ x + 2y \text{ maximum} \end{cases}$

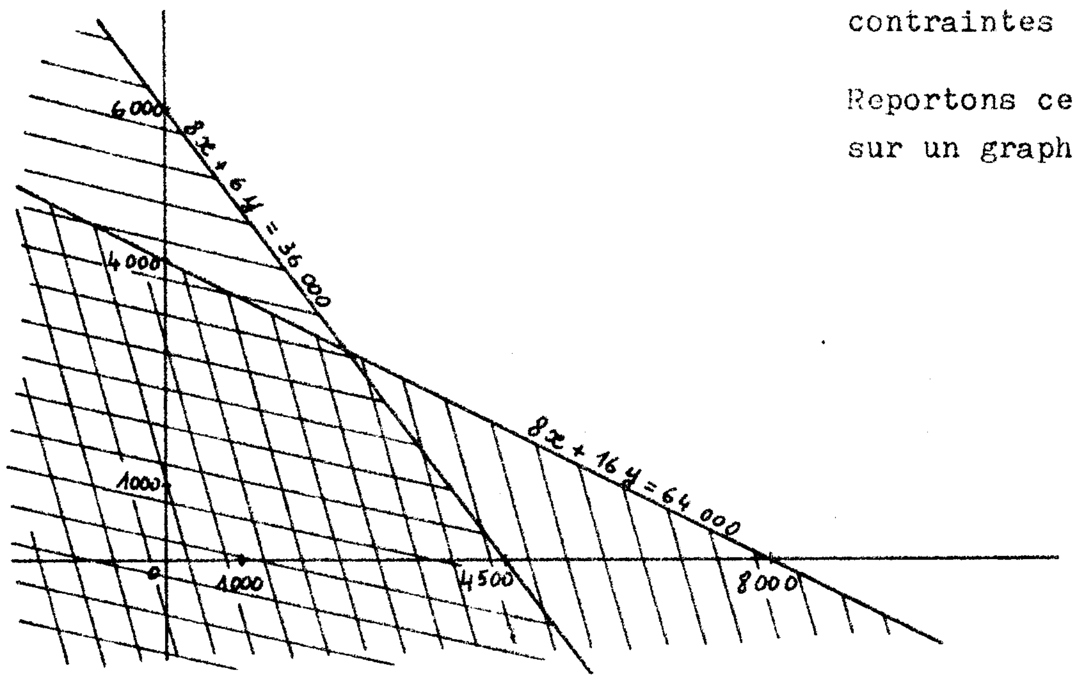
Problème : Un fabricant de jouets réalise deux sortes de véhicules pour enfants à l'aide d'une même machine : une berline et un camion . La berline est réalisée en 8 secondes et elle exige 80 grammes de métal . Le camion se réalise en 6 secondes et exige 160 grammes de métal . Chaque jour, l'atelier dispose de 640 kilogrammes de métal et la machine peut fonctionner durant 10 heures .
Le bénéfice réalisé sur une berline est de 5 francs et sur un camion il est de 6 francs . Combien de jouets de chaque type faut-il décider de fabriquer pour réaliser un profit maximum ?
Appelons x le nombre de berlines et y le nombre de camions à réaliser chaque jour . La machine peut travailler durant 10 heures c'est à dire $10 \times 60 \times 60 = 36\,000$ secondes .

De ce fait $8x + 6y \leqslant 36\,000$ (1)

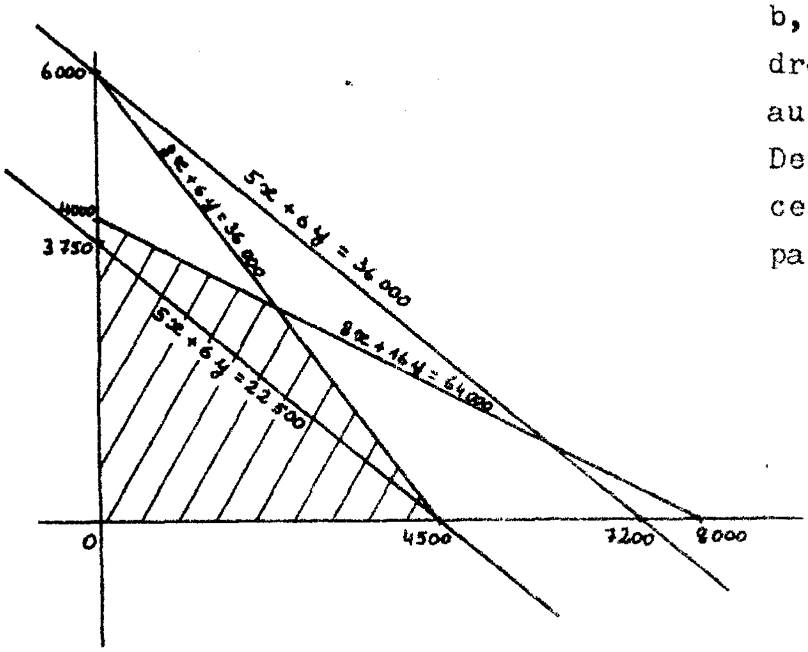
De même $80x + 160y \leqslant 640\,000$ (2) ou $8x + 16y \leqslant 64\,000$

N'oublions pas les contraintes $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ (3)

Reportons ces données sur un graphique .



Le bénéfice réalisé est de $5x + 6y$. En fixant celui-ci à une valeur b, tous les points de la droite $5x + 6y$ conduisent au même bénéfice . Dessinons quelques unes de ces droites .



par exemple

$$5x + 6y = 5 \cdot 4500$$
$$5x + 6y = 22\ 500$$

et la droite

$$5x + 6y = 6 \cdot 6000$$
$$5x + 6y = 36\ 000$$

Il apparaît clairement que b est le plus grand, dans la partie hachurée au point d'intersection des droites

$$8x + 6y = 36\ 000$$
$$8x + 16y = 64\ 000$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} 16y - 6y &= 64\ 000 - 36\ 000 \\ 10y &= 28\ 000 \\ y &= 2\ 800 \\ 8x &= 36\ 000 - 6y \\ 8x &= 36\ 000 - 16\ 800 \\ 8x &= 19\ 200 \\ x &= 2\ 400 \end{aligned}$$

Le bénéfice sera donc optimal en construisant 2 400 berlines et 2 800 camions .

<u>EXERCICES</u> . 12. Deux usines de détergents déversent leurs déchets dans une rivière . L'usine A produit toujours au moins deux fois autant de déchets que l'usine B . Ensemble elles produisent toujours au moins 9 000 litres de déchets par semaine . Les experts chargés de protéger la faune estiment que le total des déchets ne peut dépasser 15 000 litres par semaine sans mettre la population de poissons en danger .

a) Quel est le maximum de déchets tolérable pour chaque usine si on veut sauvegarder les poissons de la rivière ?

b) Les experts estiment en outre que pour 1000 litres de déchets déversés par A, deux poissons meurent chaque semaine tandis que trois poissons meurent pour 1000 litres déversés par B .

Quels sont les nombres minimum et maximum de pertes en poissons, par semainc, dues à la pollution ?

13. Pour un camp de 70 enfants, deux types de tentes peuvent être louées . La Cabane peut loger 7 enfants et coûte 500 francs par semaine . La Niche peur loger 2 enfants et coûte 100 francs par semaine . Le nombre total de tentes ne doit pas dépasser 19 . Quel est le choix le plus économique ?

14. Un navire dispose de 7 mètres cubes dans ses cales et il peut encore recevoir une charge de 12 tonnes . Trouver les nombres de containers de un mètre cube pesant deux tonnes et ceux de deux mètres cubes pesant trois tonnes qu'il peut prendre en charge, compte tenu de ces contraintes .

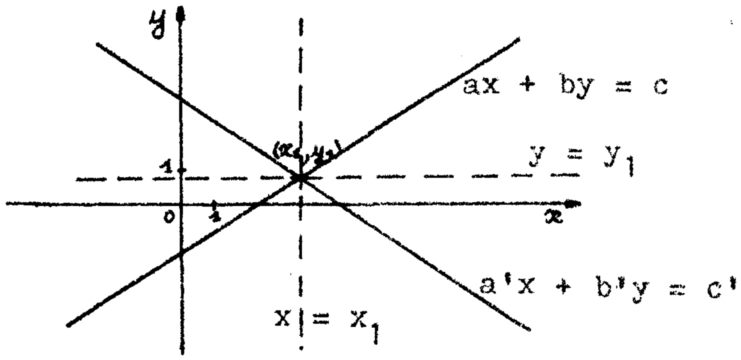
15. Un club sportif organise une rencontre et décide d'offrir des boissons afin de renflouer sa caisse . Une collecte réunit 20 litres de lait, 2 kilogrammes de sucre et du café et chocolat permettant de faire 100 tasses de chaque boisson . On décide de servir le café à 20 francs et le chocolat à 30 francs . On prévoit de servir deux sucres par tasse . Chaque paquet de 1 kilogramme de sucre contient 120 morceaux . Il faut 1/4 de litre de lait pour une boisson au chocolat et 5 fois moins pour le café . Quelle est la meilleure recette que le club peut espérer ? Combien de tasses de chaque sorte faudra-t-il servir ?

RESUME

Système de deux équations du premier degré à deux inconnues .

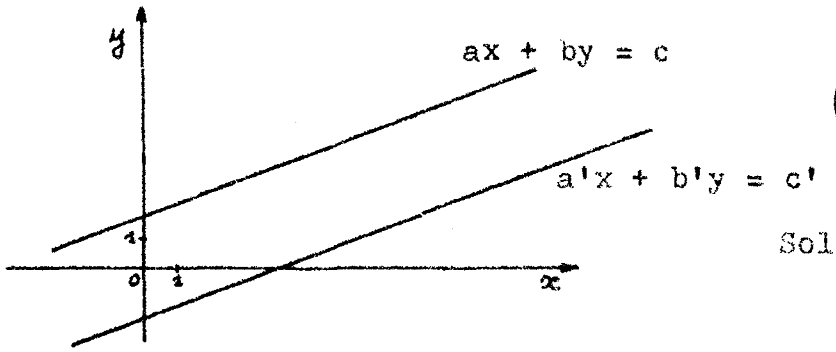
$$S \begin{cases} ax + by = c & (1) \\ a'x + b'y = c' & (2) \end{cases}$$

a) Si (1) et (2) représentent deux droites concourantes, la solution de S est fournie par les coordonnées du point d'intersection des deux droites .



$$\text{Sol }(S) = \begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \end{cases}$$

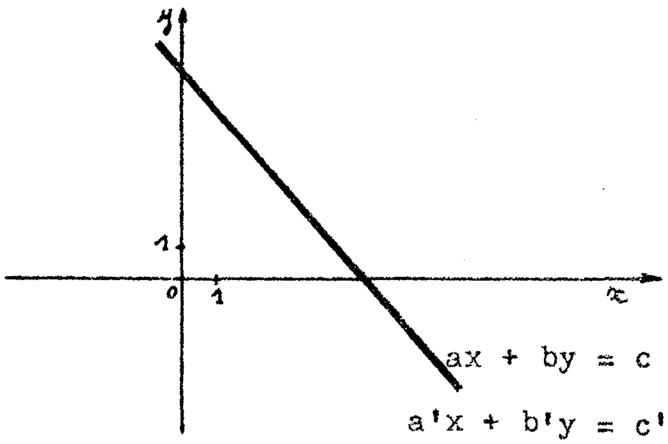
b) Si (1) et (2) représentent deux droites parallèles distinctes, Sol (S) est vide .



$$\left(\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}\right)$$

$$\text{Sol }(S) = \emptyset$$

c) Si (1) et (2) représentent deux droites confondues, le système a une infinité de solutions et Sol (S) est constitué par l'ensemble des points de cette droite .



$$\left(\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}\right)$$

Systèmes équivalents

1) Deux systèmes sont équivalents s'ils ont le même ensemble de solutions

$$S_1 \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad S_2 \begin{cases} C = 0 \\ D = 0 \end{cases}$$

sont équivalents ssi Sol (S_1) = Sol (S_2)

2) Dans un système d'équations on peut remplacer une équation $A = 0$ par une combinaison linéaire $pA + qB$ de cette équation et des autres pour autant que $p \neq 0$. En ce faisant on obtient un système équivalent.

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} pA + qB = 0 \\ B = 0 \end{cases} \quad (p \neq 0)$$

Systèmes homogènes du premier degré.

$$S \begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n = 0 \\ \dots \\ \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \dots + \alpha_nx_n = 0 \end{cases}$$

a) $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ est toujours solution d'un tel système.

b) Si $(x_1, \dots, x_n)$ est solution de S et $(y_1, \dots, y_n)$ est solution de S, alors $a(x_1, \dots, x_n) + b(y_1, \dots, y_n)$ est solution de S pour tout $a, b \in \mathbb{R}$.