Monique FRÉDERICKX

centre de documentation pédagogique

Coup d'œil sur l'hypercube

UREM – Unité de Recherche
sur l'Enseignement des Mathématiques

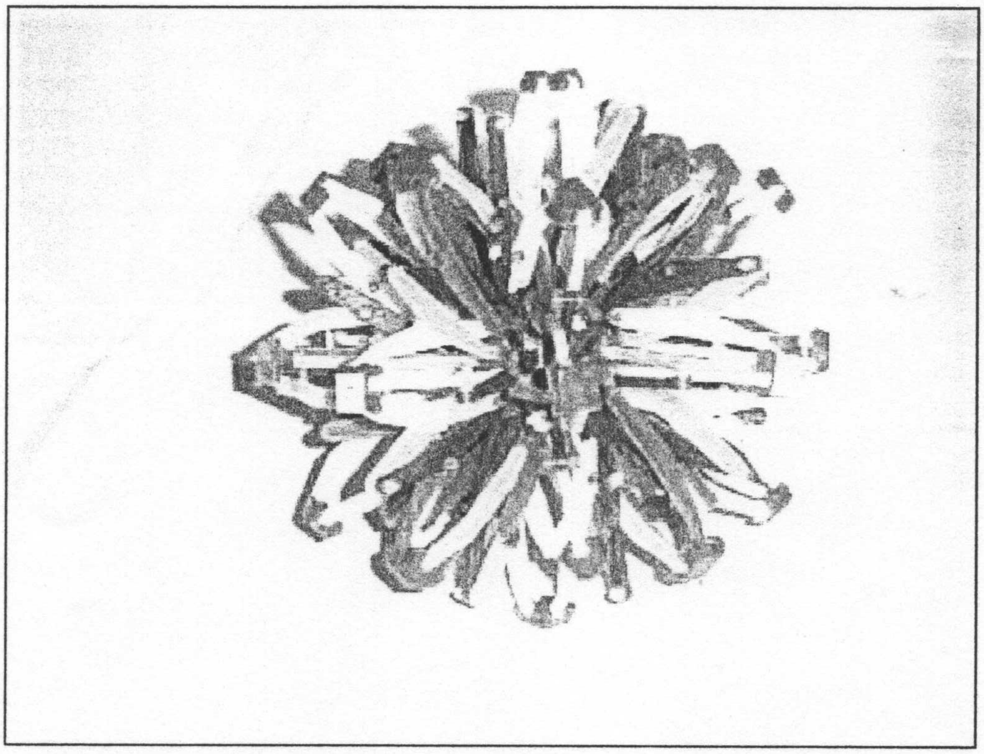
Les Cahiers du CeDoP

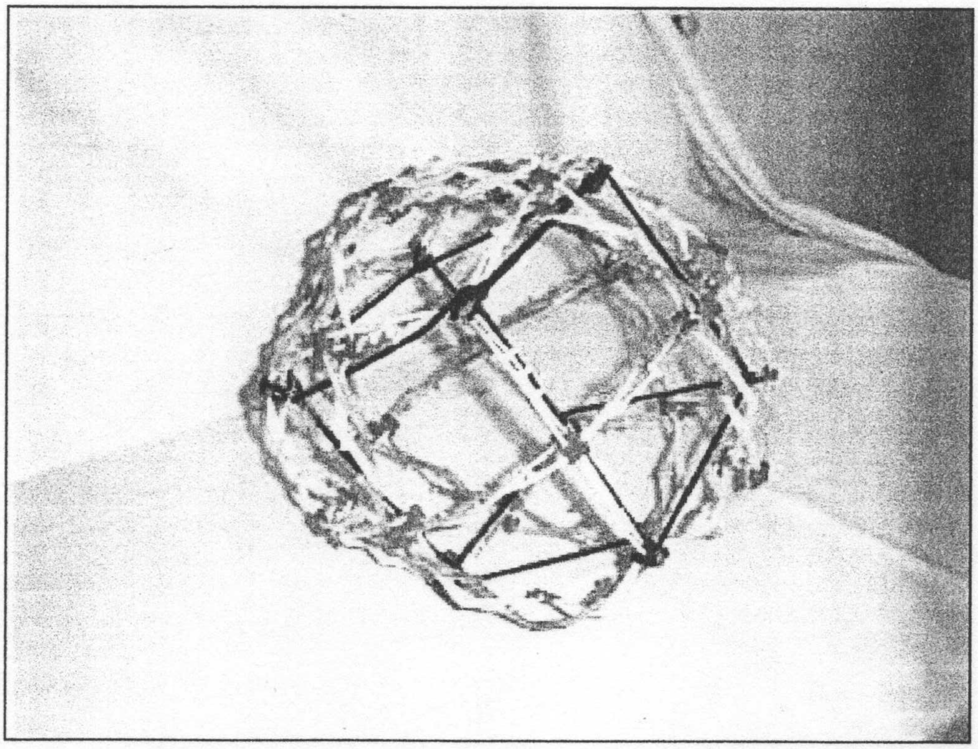
Le présent document est protégé par la législation sur le droit d'auteur. Il ne peut faire l'objet d'aucune reproduction, sous quelque support que ce soit, ni d'aucune communication au public, sous quelque forme que ce soit et moyennant quelque procédé technique que ce soit, sans l'autorisation expresse du titulaire du droit d'auteur.

© Université Libre de Bruxelles, 2005

COUP D'ŒIL SUR L'HYPERCUBE

Exposé présenté le 5 mai 2004 lors d'une journée de contact
avec l'enseignement secondaire supérieur à l'Université Libre de Bruxelles





Introduction

Il y a quelques années un jouet est apparu sur le marché. Francis Buekenhout nous en a parlé à l'occasion de l'exposition « art et mathématiques » à Charleroi. Par la suite, j'ai rencontré cet objet à la mer du nord à la devanture d'un magasin de jouets de plage. Ma petite-fille en a gagné un exemplaire lors d'une pêche aux canards à la kermesse de Braine l'Alleud. Renée Gossez a rencontré ce jouet au Japon, Charlotte Bouckaert en Espagne. Il intervient dans une séquence du film « just married ».

Bref, c'est un gadget à la mode.

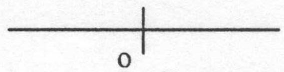
Sous l'impulsion de Francis Buekenhout, un petit groupe de passionnés de géométrie, à savoir Francis Buekenhout, Charlotte Bouckaert, Claude Culus, Monique Frédérickx et Renée Gossez, s'est réuni à plusieurs reprises autour d'une table pour étudier ce bel objet que nous avons appelé « fleur chinoise ». Le résultat de nos discussions a donné lieu à un article « La fleur chinoise : un avatar du cube » publié dans les Cahiers du CeDoP.

En cherchant le nombre de symétries qui conservent la fleur chinoise, nous avons été amenés grâce à une remarque de Claude Culus à découvrir l'hypercube ou cube dans l'espace à quatre dimensions.

Avant de plonger dans l'espace à 4 dimensions, partons d'un modèle nettement plus simple. Nous adoptons une séquence classique en étudiant un objet à une dimension, ensuite son homologue à 2, 3 et enfin 4 dimensions.

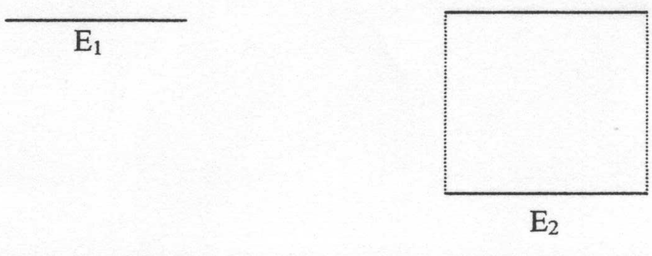
Passage de l'espace à une dimension E_1 à l'espace à deux dimensions E_2.

Nous considérons un segment sur la droite, espace à une dimension E_1.



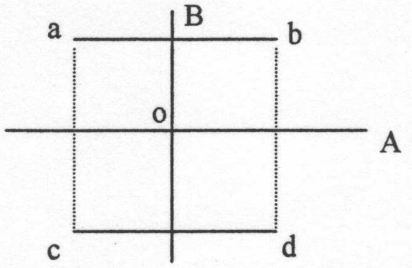
Les symétries de E_1 qui conservent ce segment sont au nombre de 2 : l'identité et la symétrie centrée de centre o, milieu du segment.

Nous passons au plan, espace à deux dimensions E_2. Nous y plongeons E_1 et le segment. Nous le dédoublons suivant une direction privilégiée. Nous obtenons un « segment double ». Nous reconnaissons un carré qui possède une direction privilégiée qui se manifeste par deux arêtes parallèles (dont la définition précise est laissée au lecteur).



Nous pouvons représenter ce segment double par un carré dont une direction d'arêtes en traits gras et l'autre en traits pointillés.

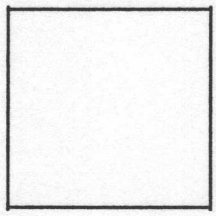
Quelles sont les symétries ou isométries du plan qui conservent un « segment double » ? Le sommet a peut prendre 4 positions mais dans ce cas, les autres sommets sont fixés. Il existe donc 4 isométries du plan qui conservent le « segment double ».



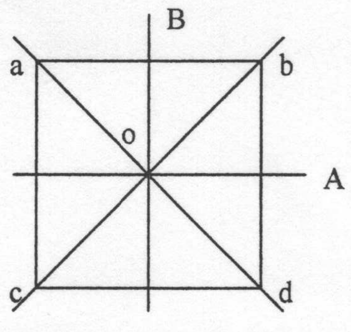
Nous voyons l'identité, la symétrie centrée S_0 et les symétries bilatérales S_A et S_B. Quatre symétries conservent le segment double.

Elles s'obtiennent en composant les symétries du segment avec la symétrie qui échange a et c d'une part et b et d d'autre part.
Notons que la symétrie S_{bc} par exemple, ne conserve pas la figure car les côtés en traits gras et ceux en traits pointillés ne sont pas conservés.

Si on ne privilégie plus une des deux directions d'arêtes, notre segment double devient un carré.

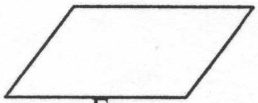


Rappelons que le « segment double » a quatre symétries qui le conservent. Comme il y a deux directions d'arêtes et que dans le carré on ne privilégie plus une direction d'arêtes , les symétries qui conservent le carré devraient être au nombre de 4 x 2 = 8. Ce qui se vérifie: on a les 4 symétries du segment double auxquelles se rajoutent S_{ad}, S_{bc} et les rotations d'un quart de tour et de ¾ de tour autour de O (Remarquons qu'on a déjà la rotation d'un demi-tour qui est S_o).

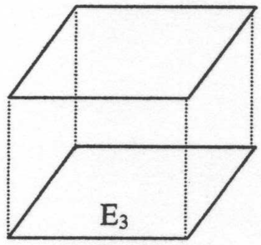


<u>Passage de l'espace à deux dimensions E_2 à l'espace à trois dimensions E_3.</u>

Nous passons à l'espace à 3 dimensions E_3. Nous y plongeons E_2 et le carré. Nous le dédoublons suivant une direction privilégiée. Nous obtenons un « carré double ». Nous reconnaissons un cube qui possède une direction privilégiée qui se manifeste par des arêtes parallèles.

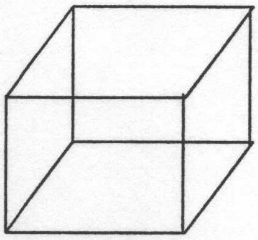


E_2



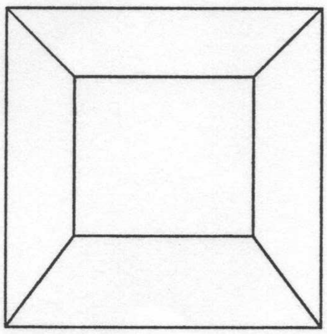
Le carré double bénéficie des 8 symétries du carré. Il faut y adjoindre la symétrie qui échange les deux carrés de notre figure. Chaque symétrie du carré peut être composée avec cette symétrie. On obtient donc 8 X 2 = 16 symétries qui conservent le carré double.

Passons au cube en ne privilégiant plus de direction d'arêtes. Il y a trois directions d'arêtes qui peuvent être échangées entre elles par diverses symétries. Le cube a donc 16 x 3 = 48 symétries qui le conservent.



<u>L'espace à 4 dimensions arrive</u>

Nous entrons dans l'espace à 4 dimensions et les figures se dessinent toujours à deux dimensions. Revenons un instant à E_2. Mettons-nous dans la peau d'un être qui vivrait dans l'espace à deux dimensions. Une manière pour lui de représenter un cube serait la suivante :

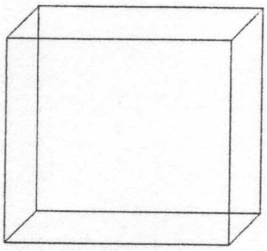


Dans ce modèle il est nettement plus difficile de concevoir que les 12 arêtes ont la même longueur et que les arêtes « obliques » sont parallèles !

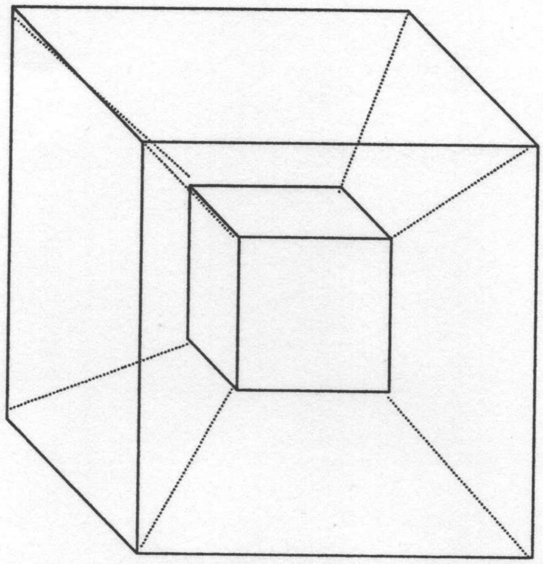
Pour faire un dessin d'un objet dans la quatrième dimension, nous surmontons les mêmes difficultés. Difficulté qui est admirablement décrite dans le livre « Flatland » de Edwin A. Abott.

<u>Passage de l'espace à trois dimensions E_3 à l'espace à quatre dimensions E_4.</u>

Nous passons à l'espace à 4 dimensions E_4. Nous y plongeons E_2 et le cube.. Nous le dédoublons suivant une direction privilégiée. Nous obtenons un « cube double ». Nous reconnaissons un hypercube qui possède une direction privilégiée qui se manifeste par des faces parallèles.

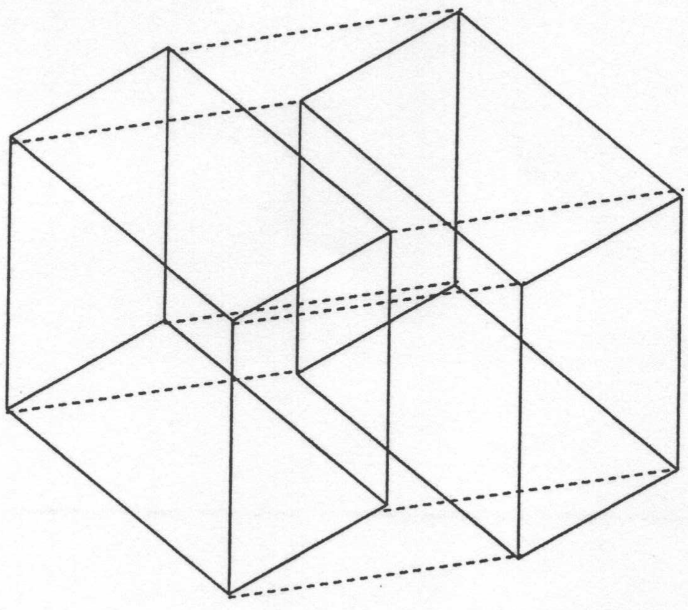


E_3



E_4

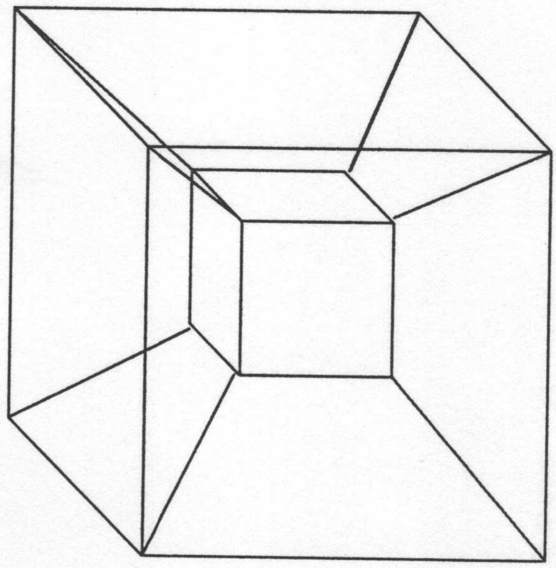
Ou encore



E_4

On rajoute la symétrie « extérieur – intérieur ». Chaque symétrie du cube peut être composée avec cette symétrie « extérieur – intérieur ». On obtient ainsi 48 X 2 = 96 symétries qui conservent le cube double ou hypercube ayant une direction d'arêtes privilégiée.

Passons à l'hypercube en ne privilégiant plus aucune direction d'arêtes. L'hypercube possède 4 directions d'arêtes qui sont interchangeables. Il a donc 96 X 4 = 384 symétries qui le conservent. Voilà donc une manière simple de déterminer le nombre de symétries qui conservent l'hypercube.



<u>Conclusion</u>

Inutile de dire que nous pouvons continuer ce raisonnement à 5, 6, n dimensions. Il y a 384x2x5 symétries qui conservent notre objet dans l'espace à 5 dimensions. De manière générale, il y a 2^n x n ! . symétries qui conservent notre objet dans l'espace à n dimensions.