

Monique PARKER

ULB

centre de documentation pédagogique

Huit questions à propos du Lotto

UREM

**Unité de Recherche
sur l'Enseignement des Mathématiques**



Les Cahiers du CeDoP

**Le contenu de ce document n'engage que la seule responsabilité de son auteur.
Toute représentation, traduction, adaptation ou reproduction, même partielle,
par tous procédés, en tous pays, faite sans autorisation préalable,
est illicite et expose le contrevenant à des poursuites judiciaires.**

Copyright © Université libre de Bruxelles - Centre de Documentation Pédagogique (CeDoP) - 1996

Mise en page : Marie-Line Haesevelde

Collection : Les Cahiers du CeDoP

ISBN 2-930089-31-8

PLAN

1. Introduction.....	p. 3
1.1. Les règles du jeu	p. 4
1.2. Les gains	p. 4
1.3. Le prix des grilles	p. 4
1.4. Les gains avec les grilles multiples	p. 5
1.5. Les hypothèses	p. 5
2. Questions.....	p. 6
3. Réponses.....	p. 7
Réponse 1	p. 7
Réponse 2	p. 9
Réponse 3	p. 10
Réponse 4	p. 10
Réponse 5	p. 11
Réponse 6	p. 11
Réponse 7	p. 12
Réponse 8	p. 14
4. Annexes	p. 15
4.1. Les probabilités de gagner	p. 15
4.2. Les 3 grilles	p. 16
4.3. Extraits du règlement	p. 18
4.4. Les possibilités de gain	p. 21

MATHÉMATIQUE

HUIT QUESTIONS
À PROPOS DU LOTTO

Parker M.

Remerciements : Je tiens à remercier très chaleureusement F. Bratzlavsky, M. Frédérickx et P. Ribeaufossé pour les innombrables améliorations qu'ils ont apportées à ce texte.

Cette étude a été réalisée dans le cadre d'un accord de coopération entre l'UREM et le CREM a.s.b.l. (Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques), avec le soutien de la Direction générale de l'Enseignement supérieur et de la Recherche scientifique, Ministère de l'Éducation, de la Recherche et de la Formation.

UREM

Unité de Recherche
sur L'Enseignement des Mathématiques

Professeurs
Fr. Buekenhout, M. Parker, J. Sengier

CAMPUS PLAINE C.P. 216
BD DU TRIOMPHE
B-1050 BRUXELLES

Tél. (32) (2) 650 58 71 (Secrétariat 650 58 64)
e-mail [ulbmath @ ulb.ac.be](mailto:ulbmath@ulb.ac.be)
Telex Unilib B 23069
Fax (32) (2) 650 58 67



1. Introduction

Les jeux d'argent occupent une place importante dans nos sociétés et parmi les jeux organisés par la Loterie Nationale, le Lotto reste le grand favori. Chaque semaine, plusieurs centaines de milliers de joueurs rentrent quelque 2 millions de bulletins du Lotto, pour une valeur d'environ 285 millions de francs.

Pour expliquer ce succès inégalé, deux raisons sont généralement avancées. Premièrement, le joueur est actif, il élabore lui-même son jeu. Deuxièmement, le rapport entre le gain et la mise est exceptionnel (du moins pour les quelques gros gagnants).

Ces « impressions » méritent d'être analysées. Quelles sont exactement les chances de gagner ? Le joueur peut-il « apprivoiser » le hasard ? Au sujet du rapport entre le gain et la mise, il est intéressant de remarquer que les sommes distribuées ne représentent que la moitié du total des mises ! L'autre moitié sert à financer un certain nombre d'entreprises culturelles, sportives, philanthropiques, ... et à alimenter les caisses de l'État. Parmi les jeux de hasard, le Lotto offre l'un des plus mauvais rendements.

Le Lotto constitue une situation pédagogique fort riche. Ses règles sont simples et il suggère de nombreuses questions. Les réponses à certaines de ces questions sont faciles, d'autres sont nettement plus subtiles. Suivant le niveau et l'intérêt des élèves auxquels on s'adresse, on peut utiliser le Lotto pour illustrer les notions de probabilités discrètes étudiées précédemment ou, au contraire, commencer par faire l'inventaire des questions auxquelles on voudrait répondre et introduire les notions et les règles de calcul à mesure qu'on s'efforce de répondre à ces questions.

Les résultats du Lotto étant facilement accessibles, on peut aussi relever pendant un certain temps le nombre de gagnants aux différents rangs, les gains, les mises, etc. et comparer ceci avec les valeurs théoriques. Enfin, on peut demander aux élèves de jouer de façon fictive, en discutant les stratégies (beaucoup de grilles à 6 numéros ou peu de grilles à 7, 8, ... ou 14 numéros ?). Mais on court un double risque : être accusé d'inciter les élèves à pratiquer un jeu de hasard et voir un élève étouffer de dépit si l'une de ses combinaisons est gagnante.

MATHÉMATIQUE

HUIT QUESTIONS
À PROPOS DU LOTTO

Parker M.

1.1. Les règles du jeu

Une **grille** comporte tous les nombres entiers de 1 à 42. Sur les grilles appelées **simples**, le joueur doit cocher 6 numéros. Il existe aussi des grilles dites **multiples** sur lesquelles le joueur peut cocher 7 ou 8 ou ... ou 14 numéros (parmi les numéros de 1 à 42).

Un tirage consiste à extraire 6 boules d'une urne, dont les numéros sont dits **gagnants**, et une septième boule qui fournit le numéro dit **complémentaire**.

Un ensemble de 6 numéros cochés est dit

- gagnant au 1^{er} rang, s'il contient les 6 numéros gagnants.
- gagnant au 2^e rang, s'il contient 5 numéros gagnants et le numéro complémentaire.
- gagnant au 3^e rang, s'il contient 5 des 6 numéros gagnants.
- gagnant au 4^e rang, s'il contient 4 des 6 numéros gagnants.
- gagnant au 5^e rang, s'il contient 3 des 6 numéros gagnants.

Une grille simple qui contient 4 bons numéros n'est gagnante qu'une seule fois, au 4^e rang. Elle n'est pas considérée comme gagnante au 5^e rang (voir art. 16 du règlement, p. 20).

Une grille multiple qui contient 4 bons numéros est gagnante plusieurs fois au 4^e rang et aussi gagnante plusieurs fois au 5^e rang. En effet, des numéros cochés on peut extraire, de plusieurs façons, 6 numéros qui en contiennent exactement 4 bons, et aussi, de plusieurs façons, 6 numéros desquels exactement 3 sont bons. Le Lotto paie dans ce cas (à juste titre) plusieurs fois le gain attribué au 4^e rang et aussi plusieurs fois le gain attribué au 5^e rang. (voir réponse à la question 5, p. 11).

1.2. Les gains

La moitié des mises est répartie entre les gagnants suivant les modalités suivantes :

- chacun des ensembles de 6 numéros cochés gagnant au 5^e rang reçoit 50 F ;
- les autres ensembles gagnants se partagent le solde dans la proportion suivante :

45 % pour les ensembles gagnants au 1^{er} rang,
10 % pour ceux gagnants au 2^e rang,
20 % pour ceux gagnants au 3^e rang et
25 % pour ceux gagnants au 4^e rang.

En outre, s'il n'y a pas de gagnant au 1^{er} rang, la part attribuée à ce rang est ajoutée à celle du tirage suivant.

Il est important de noter que, à chacun des rangs, les gains sont répartis entre tous les ensembles gagnants.

1.3. Le prix des grilles

Une grille simple à 6 numéros coûte 10 F. Les grilles multiples coûtent de 70 F (pour 7 numéros cochés) à 30.030 F (pour 14 numéros cochés). Ces prix correspondent aux nombres d'ensembles de 6 numéros cochés contenus dans les grilles multiples (voir réponse à la question 2, p. 9). Signalons qu'il faut jouer un nombre pair de grilles.



1.4. Les gains avec les grilles multiples

Le tableau qui donne ces possibilités de gain est donné en annexe (p. 21). Il s'agit chaque fois de calculer de combien de façons on peut extraire des numéros cochés un sous-ensemble de 6 numéros qui contienne 3, 4, 5 ou 6 numéros gagnants, ou 5 numéros gagnants plus le complémentaire.

Détaillons ces calculs pour une grille sur laquelle on a coché 8 numéros.

- 1) Si on a les 6 numéros gagnants plus le complémentaire, on ne gagne qu'une fois au 1^{er} rang. Mais on peut prendre 5 des 6 numéros gagnants et le complémentaire, d'où on reçoit 6 fois le gain du 2^e rang. On peut aussi prendre 5 des 6 numéros gagnants et le mauvais numéro, d'où 6 fois le gain du 3^e rang. On peut aussi prendre 4 des 6 numéros gagnants et les compléter par les 2 autres (le fait que l'un des deux soit le complémentaire n'est ici d'aucune utilité). D'où 15 fois le gain du 4^e rang. On ne peut pas prendre 3 des numéros gagnants car il est impossible de les compléter par 3 numéros perdants. On ne gagne donc rien au 5^e rang.
- 2) Si on a les 6 numéros gagnants, on ne gagne qu'une fois au 1^{er} rang. On peut prendre 5 de ces 6 numéros gagnants et les compléter par l'un des 2 autres, d'où 12 fois le gain du 3^e rang. On peut prendre 4 des numéros gagnants et les compléter par les 2 autres, d'où 15 fois le gain du 4^e rang. On ne gagne rien au 5^e rang pour la raison donnée au point 1.
- 3) Si on a 5 numéros gagnants plus le complémentaire, on ne gagne qu'une fois au 2^e rang. On peut aussi compléter les 5 numéros gagnants par l'un des 2 mauvais numéros, d'où on reçoit 2 fois le gain du 3^e rang. On peut aussi prendre 4 des 5 numéros gagnants et les compléter par 2 des 3 autres, d'où 15 fois le gain du 4^e rang. Enfin, on peut aussi prendre 3 des 5 numéros gagnants et les compléter par les 3 autres, d'où 10 fois le gain du 5^e rang.
- 4) Si on a 5 numéros gagnants, on peut les compléter par l'un des 3 mauvais, d'où 3 fois le gain du 3^e rang. On peut prendre 4 des 5 numéros gagnants et les compléter par 2 perdants. D'où 15 fois le gain du 4^e rang. On peut prendre 3 des 5 numéros gagnants et les compléter par les 3 autres, d'où 10 fois le gain du 5^e rang.
- 5) Si on a 4 numéros gagnants, on peut les compléter par 2 des 4 autres numéros, d'où 6 fois le gain du 4^e rang. On peut aussi prendre 3 des 4 numéros gagnants, et les compléter par 3 des 4 autres, d'où $4 \times 4 = 16$ fois le gain du 5^e rang.
- 6) Si on a 3 numéros gagnants, on peut les compléter par 3 des 5 autres, d'où 10 fois le gain du 5^e rang.

1.5. Les hypothèses

Les 42 boules du Lotto sont régulièrement vérifiées. Des conditions très strictes sont imposées à leur poids, leur diamètre, leur faculté de rebond et la pureté du caoutchouc qui les constitue. Il est par conséquent « raisonnable » de supposer qu'elles ont toutes les mêmes chances de sortir du tambour. On se trouve donc dans une situation où les différents tirages possibles sont supposés équiprobables et on peut utiliser la formule

$$\text{probabilité de l'événement A} = \frac{\text{nombre de grilles où A est réalisé}}{\text{nombre de grilles possibles}}$$

MATHÉMATIQUE**2. Questions**

HUIT QUESTIONS
À PROPOS DU LOTTO

- Q1 : Avec une grille simple, quelle est la probabilité de gagner à chacun des 5 rangs ? Quelle est la probabilité d'être gagnant à un rang quelconque ?
- Q2 : Pourquoi les grilles multiples coûtent-elles plus cher ? Leur prix est-il « raisonnable » ?
- Q3 : Quelle est la probabilité de gagner à chacun des 5 rangs avec les différentes grilles multiples ?
- Q4 : Quelle est la probabilité de ne pas avoir de gagnant au premier rang ?
- Q5 : Pourquoi le Lotto paie-t-il plus si l'on a 4 bons numéros sur une grille multiple où l'on a coché 8 numéros que si l'on a 4 bons numéros sur une grille simple ?
- Q6 : À prix égal, est-il plus avantageux de jouer une grille à 10 numéros ou 210 grilles à 6 numéros ?
- Q7 : Quelle est la probabilité que parmi les 6 numéros gagnants il y ait 2 numéros consécutifs ?
- Q8 : Est-il utile d'étudier les fréquences de sortie des numéros ?

Parker M.

3. Réponses

Réponse 1

Il existe essentiellement deux façons de raisonner : une façon dynamique qui regarde les numéros de la grille un par un et une façon statique qui regarde les numéros choisis globalement. Par exemple, pour calculer la probabilité de gagner au 3^e rang avec une grille simple, la première méthode consiste à dire :

la probabilité que le premier numéro soit gagnant est $\frac{6}{42}$, la probabilité que le deuxième soit aussi gagnant est $\frac{5}{41}$, etc. et la probabilité que le sixième numéro ne soit ni gagnant ni complémentaire est $\frac{35}{37}$. Le produit

$$\frac{6}{42} \times \frac{5}{41} \times \frac{4}{40} \times \frac{3}{39} \times \frac{2}{38} \times \frac{35}{37}$$

est la probabilité que les 5 **premiers** numéros soient gagnants et que le **dernier** soit perdant. Mais l'événement auquel on s'intéresse ne tient compte que de l'ensemble des numéros, sans ordre. Le numéro perdant peut être le premier, ou le deuxième, ..., ou le dernier. La probabilité que le premier numéro soit perdant et que les suivants soient gagnants est

$$\frac{35}{42} \times \frac{6}{41} \times \frac{5}{40} \times \frac{4}{39} \times \frac{3}{38} \times \frac{2}{37}.$$

Cette probabilité est égale à la précédente, tout comme celle que le deuxième numéro soit perdant, etc. L'événement auquel on s'intéresse est la réunion de ces 6 événements disjoints, la probabilité cherchée est donc

$$\frac{6}{42} \times \frac{5}{41} \times \frac{4}{40} \times \frac{3}{39} \times \frac{2}{38} \times \frac{35}{37} \times 6.$$

Ce raisonnement est correct mais procède d'une démarche souvent obscure pour les élèves. Quand faut-il multiplier et quand faut-il additionner ? La multiplication par le facteur 6 est d'une tout autre nature que le produit des 6 autres facteurs. Cela est-il clair pour les élèves ? Commencer par tenir compte de l'ordre pour ensuite multiplier par le nombre de permutations est souvent une source d'erreur. Beaucoup d'élèves oublient de multiplier par le nombre d'ordres possibles ou multiplient sans vraiment savoir pourquoi. Dans les calculs de dénombrements, quand le résultat auquel on s'intéresse ne tient pas compte de l'ordre, il est souvent plus facile (et moins dangereux) de compter les cas possibles et les cas favorables avec des formules de combinaisons.

Cette seconde méthode, qui considère globalement l'ensemble des 6 numéros choisis, consiste à calculer le nombre de grilles possibles et le nombre de grilles gagnantes et d'appliquer la définition de la page 5. Le nombre de grilles simples possibles correspond aux différents choix de 6 numéros parmi 42 numéros, soit

$$\binom{42}{6} = \frac{42 \times 41 \times 40 \times 39 \times 38 \times 37}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} = 5245786$$

MATHÉMATIQUE

HUIT QUESTIONS À PROPOS DU LOTTO

Remarquons ici qu'il faut fermement déconseiller aux élèves de calculer $\frac{42!}{6!36!}$. Non seulement la capacité de mémoire de leur calculatrice risque d'être dépassée, mais des erreurs d'arrondi peuvent apparaître. Qu'ils songent à $\frac{1000!}{999!}$.

Les grilles qui gagnent au 3^e rang sont celles qui contiennent 5 des 6 numéros gagnants et un numéro perdant. Le nombre de telles grilles est donc $\binom{6}{5} \times \binom{35}{1}$.

On trouve évidemment la même probabilité.

Peut-être est-il utile de montrer aux élèves les deux façons de raisonner, dans un ou deux cas simples. Je crois personnellement que compter le nombre de grilles possibles et ensuite le nombre de grilles auxquelles on s'intéresse présente l'avantage d'être transposable à toutes les situations de tirages sans remise. C'est cette méthode qui sera utilisée dans la suite.

Nombre de grilles simples gagnantes :

au premier rang : une seule

au deuxième rang : celles qui contiennent 5 des 6 numéros gagnants et le numéro complémentaire, soit

$$\binom{6}{5} \times \binom{1}{1} = 6$$

au troisième rang : celles qui contiennent 5 des 6 numéros gagnants et un numéro perdant (c'est-à-dire ni gagnant, ni complémentaire), soit

$$\binom{6}{5} \times \binom{35}{1} = 6 \times 35 = 210$$

au quatrième rang : celles qui contiennent 4 des 6 numéros gagnants et 2 numéros non gagnants (dont l'un des deux peut être le numéro complémentaire), soit

$$\binom{6}{4} \times \binom{36}{2} = \binom{6}{2} \times \binom{36}{2} = \frac{6 \times 5}{2} \times \frac{36 \times 35}{2} = 9450$$

au cinquième rang : celles qui contiennent 3 des 6 numéros gagnants et 3 autres numéros, soit

$$\binom{6}{3} \times \binom{36}{3} = 142800$$

Les différentes probabilités de gain avec une grille simple valent donc :

au premier rang : $1,9 \times 10^{-7}$ soit environ 1 chance sur 5 millions ;

au deuxième rang : 11×10^{-7} soit environ 1 chance sur 900 000 ;

au troisième rang : 4×10^{-5} soit environ 1 chance sur 2500 ;

au quatrième rang : 18×10^{-4} soit environ 1 chance sur 555 ;

au cinquième rang : 272×10^{-4} soit environ 1 chance sur 37.

Parker M.

La probabilité de gagner quelque chose avec une grille simple est la somme de ces probabilités : elle vaut 0,029, soit environ 1 chance sur 34. Ou encore, parmi 1000 grilles simples, 971 ne rapportent rien.

Si l'on observe les résultats du Lotto pendant une durée suffisamment longue, par exemple un an, on constate que le pourcentage de grilles gagnantes aux 4^e et 5^e rangs est assez stable mais que le nombre de grilles ayant 5 ou 6 numéros gagnants est fort variable.

Remarquons encore que la chance de gagner au 1^{er} rang n'est que de 1 sur environ 5 millions, mais qu'il n'est pas « anormal » d'avoir un ou même deux gagnants dans la mesure où le nombre de grilles jouées se compte en millions.

Réponse 2

Les grilles multiples permettant de cocher 7, 8, ... ou 14 numéros sont un moyen pour les gros joueurs paresseux d'économiser leurs forces. Une grille multiple sur laquelle le joueur a coché 7 numéros contient 7 sous-ensembles de 6 numéros cochés. Pour cette raison, son prix est égal à 7 fois celui d'une grille de 6 numéros. Remarquons toutefois que ces 7 sous-ensembles de 6 numéros ne sont pas disjoints et qu'il faut se garder de croire que les probabilités de gain sont égales à 7 fois celles d'une grille simple ! (voir réponses aux questions 3 et 6, p. 10 et p. 11).

Les grilles multiples à 8, 9, ..., 14 numéros contiennent respectivement

$$\binom{8}{6} = 28, \binom{9}{6} = 84, \binom{10}{6} = 210, \binom{11}{6} = 462, \binom{12}{6} = 924, \binom{13}{6} = 1716 \text{ et}$$

$$\binom{14}{6} = 3003 \text{ sous-ensembles de 6 numéros cochés, ce qui explique leur prix.}$$

MATHÉMATIQUE

Réponse 3

HUIT QUESTIONS
À PROPOS DU LOTTO

Les calculs se faisant de la même façon pour les différentes grilles multiples, nous ne détaillerons à titre d'exemple que le cas des grilles à 13 numéros cochés. Les résultats pour les grilles multiples sont résumés dans le tableau donné en annexe (p. 15).

Il y a $\binom{42}{13}$ grilles possibles. Parmi elles, il y en a

- $\binom{6}{6} \times \binom{1}{1} \times \binom{35}{6}$ qui contiennent les 6 numéros gagnants, le numéro complémentaire et 6 numéros parmi les 35 autres,
- $\binom{6}{6} \times \binom{35}{7}$ qui contiennent les 6 numéros gagnants et 7 des 35 numéros qui ne sont ni gagnants ni le numéro complémentaire,
- $\binom{6}{5} \times \binom{1}{1} \times \binom{35}{7}$ qui contiennent 5 des 6 numéros gagnants, le numéro complémentaire et 7 des 35 autres,
- $\binom{6}{5} \times \binom{35}{8}$ qui contiennent 5 des 6 numéros gagnants et 8 des 35 numéros qui ne sont ni gagnants ni le numéro complémentaire,
- $\binom{6}{4} \times \binom{36}{9}$ qui contiennent 4 des 6 numéros gagnants et 9 des 36 autres numéros (le numéro complémentaire ne joue ici aucun rôle particulier),
- $\binom{6}{3} \times \binom{36}{10}$ qui contiennent 3 des 6 numéros gagnants et 10 des 36 autres numéros.

Parker M.

Réponse 4

La réponse dépend évidemment du nombre de grilles validées, et en particulier du nombre de grilles multiples de chaque type, ce qui rend le calcul difficile. Pour simplifier le problème, nous allons supposer que toutes les grilles sont simples et soit N leur nombre. Chacune de ces grilles gagne ou perd au rang 1 indépendamment des autres. On peut donc calculer la probabilité qu'aucune de ces N grilles ne remporte le gros lot :

$$(1 - 0,19 \times 10^{-6})^N$$

Le nombre de bulletins varie de 1 à 2 millions, mais le nombre d'équivalents-grilles-simples varie lui de 10 à 25 millions.

Pour $N = 2 \times 10^6$, on trouve 0,68.

Pour $N = 2 \times 10^7$, on trouve 0,02.

Réponse 5

Si l'on a 4 bons numéros sur une grille où l'on a coché 8 numéros, le Lotto paie 6 fois le gain du 4^e rang et 16 fois le gain du 5^e rang. En effet, on peut extraire de ces 8 numéros cochés 6 sous-ensembles de 6 numéros qui contiennent les 4 bons numéros : il suffit de compléter ces derniers par 2 numéros choisis parmi les 4 mauvais.

Par ailleurs, de ces 8 numéros cochés on peut aussi extraire 16 sous-ensembles qui contiennent exactement 3 numéros gagnants : il suffit de choisir 3 des 4 bons numéros et 3 des 4 mauvais. Ceci peut se faire de $\binom{4}{3} \times \binom{4}{3} = 16$ façons différentes.

Un tableau donnant les possibilités de gains avec les bulletins multiples est disponible dans les bureaux de validation. Il est reproduit en annexe (p. 21). Tous les calculs sont semblables.

Réponse 6

On ne peut pas vraiment répondre à cette question, puisque les gains dépendent du nombre de gagnants. Mais on peut faire plusieurs remarques. La probabilité de gagner au premier rang avec une grille à 10 numéros est bien égale à 210 fois la probabilité de gagner au premier rang avec une grille simple. Mais le tableau (p. 15) montre que ce n'est pas le cas à partir du deuxième rang. Ceci s'explique par le fait que dans la grille à 10 numéros, beaucoup de sous-grilles à 6 numéros peuvent contenir les mêmes ensembles de 3, 4 ou 5 numéros.

On a vu que la probabilité de gagner à un rang quelconque avec une grille à 10 numéros vaut 0,1349 et avec une grille à 6 numéros vaut 0,0291. Si l'on joue 210 grilles à 6 numéros, la probabilité de gagner ne vaut certainement pas $0,0291 \times 210$. Calculons cette probabilité.

- La probabilité pour une grille simple d'être perdante
= $1 - 0,0291 = 0,9709$.
- La probabilité pour 210 grilles simples d'être perdantes
= $(0,9709)^{210} = p = 2,026 \cdot 10^{-3}$.
- La probabilité de gagner avec 210 grilles simples
= $1 - p = 0,9980$.

On est donc « presque certain » de gagner quelque chose, mais la seule vraie certitude est d'avoir déjà dépensé 2100 F.

On peut donc simplement dire qu'une grille à 10 numéros coûte 210 fois plus cher qu'une grille simple, ne donne pas une probabilité 210 fois plus grande de gagner, mais procure des gains plus importants si l'on gagne, comme on l'a vu dans la réponse à la question 5 (ci-dessus).

MATHÉMATIQUE

Réponse 7

HUIT QUESTIONS
À PROPOS DU LOTTO

Il n'existe aucune façon vraiment immédiate de calculer cette probabilité. La méthode présentée ci-après présente l'avantage de montrer comment répondre à une question beaucoup plus générale : de combien de façons peut-on répartir N objets (identiques) dans k boîtes ? La démarche suivie est un bel exemple de modélisation. Elle peut être comprise par beaucoup d'élèves à condition d'être expliquée très lentement.

Nous allons en fait calculer la probabilité de ne pas avoir deux numéros consécutifs gagnants (événement contraire). Pour cela, alignons en ordre croissant les 42 boules dans une boîte :

Parker M.



Remplaçons à présent les 6 boules gagnantes par 6 parois.



Les 36 boules restantes sont réparties dans $7 = (6 + 1)$ sous-ensembles (ou boîtes), certaines de ces boîtes pouvant être vides.

Remarquons que nous pouvons oublier les numéros des boules, il suffit de savoir combien il y a de boules dans chacune des 7 boîtes pour retrouver les 6 boules gagnantes.

Exemple 1 :



Les boules gagnantes sont 7, 17, 19, 29, 32, 39.

Exemple 2 :



Les boules gagnantes sont 1, 6, 19, 30, 40, 42.

Exemple 3 :



Les boules gagnantes sont 12, 21, 22, 28, 29, 42.

Choisir 6 boules gagnantes parmi 42 boules équivaut donc à répartir 36 boules dans 7 boîtes.

Plus généralement, répartir M objets identiques dans k boîtes (certaines pouvant rester vides) revient à insérer $k - 1$ « parois », c'est-à-dire à choisir $k - 1$ objets parmi $M + k - 1$ objets. Ceci peut se faire de $\binom{M + k - 1}{k - 1}$ façons.



MATHÉMATIQUE

Voyons à présent comment nous pouvons tenir compte de numéros consécutifs gagnants.

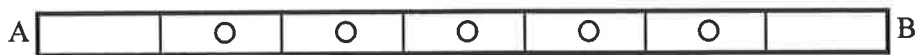
Appelons « boîtes extérieures » les deux boîtes limitées par les parois extérieures A et B de la boîte initiale, et « boîtes intérieures » les cinq autres boîtes.

Dans l'exemple 1, aucune des boîtes n'est vide.

Dans l'exemple 2, les deux « boîtes extérieures » sont vides, mais aucune boîte intérieure n'est vide. Comme dans l'exemple 1, il n'y a pas de numéros consécutifs gagnants.

Dans l'exemple 3, il y a des numéros consécutifs gagnants : certaines des 5 boîtes intérieures sont vides.

Comptons de combien de façons on peut répartir 36 boules dans les 7 boîtes sans qu'aucune des 5 boîtes intérieures ne soit vide. Commençons par mettre une boule dans chacune de ces 5 boîtes intérieures.



Il reste 31 boules à répartir dans les 7 boîtes, cette fois sans aucune contrainte.

Nous avons vu ci-dessus que ceci peut se faire de $\binom{37}{6}$ façons. Il y a donc $\binom{37}{6}$

façons d'avoir 6 boules gagnantes sans que deux d'entre elles portent des numéros consécutifs.

Conclusion

La probabilité de ne pas avoir deux numéros consécutifs gagnants vaut

$$\frac{\binom{37}{6}}{\binom{42}{6}} = \frac{37 \times 36 \times 35 \times 34 \times 33 \times 32}{42 \times 41 \times 40 \times 39 \times 38 \times 37} = 0,4432 .$$

La probabilité d'avoir au moins deux numéros consécutifs gagnants vaut donc 0,5568.

MATHÉMATIQUE

Réponse 8

HUIT QUESTIONS
À PROPOS DU LOTTO

On reçoit parfois des offres présentées comme confidentielles, d'envoi gratuit de « stratégies gagnantes au Lotto ». Bien sûr, ce premier envoi n'est qu'une façon de tenter de vendre un livre qui lui est loin d'être gratuit.

Si les recettes proposées sont vraiment efficaces, pourquoi les éditeurs ne se contentent-ils pas de jouer et de gagner au Lotto, au lieu de se fatiguer à essayer de vendre leur livre ?

Dans ces publications consacrées au Lotto, on trouve toutes sortes de conseils censés augmenter les chances de gagner, parfois accompagnées de la fréquence de sortie des numéros. Tenace est la croyance qu'il faut choisir (ou ne pas choisir) les numéros qui sont sortis souvent (ou rarement).

Il est vrai que si on jette 1000 fois une pièce de monnaie non truquée, on verra peut-être 520 fois pile et 480 fois face, mais on ne verra quasiment jamais 200 fois pile et 800 fois face. De là à croire que si la pièce montre 20 fois de suite face, elle va compenser son erreur et montrer pile au coup suivant, il y a un pas à ne pas franchir !

Pour combattre cette idée erronée, il est utile de considérer une situation plus simple que le Lotto. Supposons qu'aux trois premiers tirages d'une loterie, composée de deux boules A et B, la boule A soit sortie les 3 fois. La probabilité que la boule A sorte 4 fois de suite valant $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$, on pourrait être tenté de prédire la sortie de la boule B au 4^e tirage. Or la probabilité que la boule B sorte pour la première fois au 4^e tirage vaut aussi $\frac{1}{16}$. Bien sûr, ceci équivaut à dire que les tirages sont indépendants, qu'à chaque tirage la probabilité de sortie de A vaut $\frac{1}{2}$.

La seule remarque intéressante concerne la façon d'augmenter ses chances de gagner vraiment beaucoup, dans l'éventualité (bien peu probable) où l'on aurait joué une grille gagnante à l'un des deux premiers rangs. Le gain étant fonction du nombre de gagnants à ce rang, il est suggéré d'éviter les numéros les plus fréquemment cochés de façon à être éventuellement le seul gagnant, ou un parmi les rares gagnants.

Ainsi, les numéros de 1 à 31 correspondant à des mois ou des jours, ils sont plus fréquemment choisis. Il est aussi suggéré, pour la même raison, d'éviter les combinaisons qui correspondent à certains dessins sur la grille, colonne, ligne, diagonale, figure symétrique, etc.

Mais évidemment, tout ceci n'augmente pas les chances de gagner...

Signalons encore qu'un test χ^2 , appliqué à la fréquence d'apparition de chaque numéro depuis la création du Lotto en 1978, montre que les différences de fréquences entre les numéros ne sont dues qu'aux seules fluctuations aléatoires.

Parker M.



4. Annexes

4.1. Probabilités de gagner

Numéros gagnants	Nombre de numéros cochés				
	6	7	8	9	10
6+	-	$3,7 \cdot 10^{-8}$	$3 \cdot 10^{-7}$	$1,3 \cdot 10^{-6}$	$4,4 \cdot 10^{-6}$
6	$1,9 \cdot 10^{-7}$	$1,3 \cdot 10^{-6}$	0,000005	0,000015	0,000036
5+	$1,1 \cdot 10^{-6}$	$7,8 \cdot 10^{-6}$	0,000030	0,000088	0,000214
5	0,000040	0,000132	0,000333	0,000700	0,001324
4	0,001801	0,003970	0,007486	0,012682	0,019856
3	0,027222	0,043668	0,063881	0,087366	0,113463
Somme	0,0291	0,0478	0,0717	0,1009	0,1349

Numéros gagnants	Nombre de numéros cochés			
	11	12	13	14
6+	0,000012	0,000029	0,000064	0,000127
6	0,000076	0,000147	0,000263	0,000445
5+	0,000455	0,000880	0,001581	0,002672
5	0,002275	0,003649	0,005534	0,008014
4	0,029252	0,041047	0,055338	0,072130
3	0,141385	0,170270	0,199216	0,227319
Somme	0,1735	0,2160	0,2620	0,3107

On écrit 6+ (ou 5+) pour 6 (ou 5) gagnants + complémentaire.

4.2. Les 3 grilles

lotto 6 lotto 6 lotto

Nationale Loterij	1 2 3 4 5 6	1 2 3 4 5 6	1 2 3 4 5 6	1 2 3 4 5 6	1 2 3 4 5 6
	7 8 9 10 11 12	7 8 9 10 11 12	7 8 9 10 11 12	7 8 9 10 11 12	7 8 9 10 11 12
	13 14 15 16 17 18	13 14 15 16 17 18	13 14 15 16 17 18	13 14 15 16 17 18	13 14 15 16 17 18
	19 20 21 22 23 24	19 20 21 22 23 24	19 20 21 22 23 24	19 20 21 22 23 24	19 20 21 22 23 24
	25 26 27 28 29 30	25 26 27 28 29 30	25 26 27 28 29 30	25 26 27 28 29 30	25 26 27 28 29 30
	31 32 33 34 35 36	31 32 33 34 35 36	31 32 33 34 35 36	31 32 33 34 35 36	31 32 33 34 35 36
37 38 39 40 41 42	37 38 39 40 41 42	37 38 39 40 41 42	37 38 39 40 41 42	37 38 39 40 41 42	
Nationallotterie	ANN	ANN	ANN	ANN	ANN
	1 2 3 4 5 6	1 2 3 4 5 6	1 2 3 4 5 6	1 2 3 4 5 6	1 2 3 4 5 6
	7 8 9 10 11 12	7 8 9 10 11 12	7 8 9 10 11 12	7 8 9 10 11 12	7 8 9 10 11 12
	13 14 15 16 17 18	13 14 15 16 17 18	13 14 15 16 17 18	13 14 15 16 17 18	13 14 15 16 17 18
	19 20 21 22 23 24	19 20 21 22 23 24	19 20 21 22 23 24	19 20 21 22 23 24	19 20 21 22 23 24
	25 26 27 28 29 30	25 26 27 28 29 30	25 26 27 28 29 30	25 26 27 28 29 30	25 26 27 28 29 30
31 32 33 34 35 36	31 32 33 34 35 36	31 32 33 34 35 36	31 32 33 34 35 36	31 32 33 34 35 36	
37 38 39 40 41 42	37 38 39 40 41 42	37 38 39 40 41 42	37 38 39 40 41 42	37 38 39 40 41 42	
Loterie Nationale	20F	40F	60F	80F	100F
	120F				

TIRAGES
ZIEHUNGEN
TREKKINGEN

1	2
4	6
8	10
20	

OUI JA JA

NON NEIN NEEN

30F

192-029

Simple 6/42 Einfach 6/42 Enkelvoudig

lotto 6 lotto 6 lotto

Nationale Loterij	1 2 3 4 5 6	1 2 3 4 5 6	1 2 3 4 5 6	1 2 3 4 5 6	1 2 3 4 5 6
	7 8 9 10 11 12	7 8 9 10 11 12	7 8 9 10 11 12	7 8 9 10 11 12	7 8 9 10 11 12
	13 14 15 16 17 18	13 14 15 16 17 18	13 14 15 16 17 18	13 14 15 16 17 18	13 14 15 16 17 18
	19 20 21 22 23 24	19 20 21 22 23 24	19 20 21 22 23 24	19 20 21 22 23 24	19 20 21 22 23 24
	25 26 27 28 29 30	25 26 27 28 29 30	25 26 27 28 29 30	25 26 27 28 29 30	25 26 27 28 29 30
	31 32 33 34 35 36	31 32 33 34 35 36	31 32 33 34 35 36	31 32 33 34 35 36	31 32 33 34 35 36
37 38 39 40 41 42	37 38 39 40 41 42	37 38 39 40 41 42	37 38 39 40 41 42	37 38 39 40 41 42	
Nationallotterie	ANN	ANN	ANN	ANN	ANN
	1 2 3 4 5 6	1 2 3 4 5 6	1 2 3 4 5 6	1 2 3 4 5 6	1 2 3 4 5 6
	7 8 9 10 11 12	7 8 9 10 11 12	7 8 9 10 11 12	7 8 9 10 11 12	7 8 9 10 11 12
	13 14 15 16 17 18	13 14 15 16 17 18	13 14 15 16 17 18	13 14 15 16 17 18	13 14 15 16 17 18
	19 20 21 22 23 24	19 20 21 22 23 24	19 20 21 22 23 24	19 20 21 22 23 24	19 20 21 22 23 24
	25 26 27 28 29 30	25 26 27 28 29 30	25 26 27 28 29 30	25 26 27 28 29 30	25 26 27 28 29 30
31 32 33 34 35 36	31 32 33 34 35 36	31 32 33 34 35 36	31 32 33 34 35 36	31 32 33 34 35 36	
37 38 39 40 41 42	37 38 39 40 41 42	37 38 39 40 41 42	37 38 39 40 41 42	37 38 39 40 41 42	
Loterie Nationale	140 F 7	280 F 7	420 F 7	560 F 7	700 F 7
	560 F 8	1.120 F 8	1.680 F 8	2.240 F 8	2.800 F 8
	1.680 F 9	3.360 F 9	5.040 F 9	6.720 F 9	8.400 F 9
	4.200 F 10	8.400 F 10	12.600 F 10	16.800 F 10	21.000 F 10

TIRAGES
ZIEHUNGEN
TREKKINGEN

1	2
4	6
8	10
20	

OUI JA JA

NON NEIN NEEN

30F

056-624

Multiplus 6/42 Multiplus 6/42 Multiplus



lotto 6 lotto 6 lotto

Nationallotterie Nationale Loterij Loterie Nationale

8	280 F
9	840 F
10	2.100 F
11	4.620 F
12	9.240 F
13	17.160 F
14	30.030 F

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42

ZIEHUNGEN
TREKKINGEN
TIRAGES

1	2
4	6
8	10
20	

JOKER

JA
 JA
 OUI 30F
 NEIN
 NEEN
 NON

8 0 2 - 9 1 2

Mehrfach 6/42 Meervoudig 6/42 Multiple



4.3. Extraits du règlement du Lotto

LOTTERIE NATIONALE

Établissement public sous le contrôle du Ministère des Finances
(loi du 22 juillet 1991)

Rue Cardinal Mercier 6
1000 BRUXELLES
Tél. : 02/510 15 11
Lottophone : 02/539 11 11

LOTTO ET JOKER

Règles de participation à partir du 4 octobre 1993.
(A.R. 5.9.1993 - M.B. 8.9.1993)

...

Art. 3. § 1er. La participation au Lotto consiste à pronostiquer le résultat d'un tirage au sort déterminant un ensemble de 6 numéros parmi la série de numéros allant de 1 à 42. Chaque pronostic est basé sur un ensemble de 6 numéros.

...

Art. 5. § 1er.

...

Il existe les types de bulletins suivants :

- 1° le bulletin simple ;
- 2° le bulletin multiple ;
- 3° le bulletin multiplus.

§ 2. Les trois types de bulletins visés au § 1er sont utilisables pour la prise de participation pour 1, 2, 4, 6, 8, 10 ou 20 tirages, selon le choix du participant.

...

Art. 6. Le bulletin simple comporte 12 grilles à 42 cases numérotées de 1 à 42. Ces grilles sont groupées en 6 groupes de 2 grilles superposées. La participation se fait obligatoirement par groupe de 2 grilles superposées. Selon sa mise, le participant remplit, en commençant par la gauche, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 groupes de 2 grilles superposées.

Le montant de la mise figure en bas des groupes de 2 grilles superposées pour la participation à un tirage. Il est fixé à 20 F, 40 F, 60 F, 80 F, 100 F ou 120 F pour respectivement 2, 4, 6, 8, 10 ou 12 grilles.

...

Le participant choisit par grille 6 numéros en traçant une croix en forme de « x » dans les cases concernées.

Pour chaque groupe de deux grilles superposées figure une case entre celles-ci. En traçant une croix en forme de « x » dans une ou plusieurs de ces cases, le participant annule les pronostics émis dans chacune des deux grilles entre lesquelles se situe ladite case.

Sur le bulletin figure en outre un cadre comportant 7 cases distinctes où sont mentionnés respectivement les nombres 1, 2, 4, 6, 8, 10 ou 20. Elles permettent au participant de choisir une participation à 1, 2, 4, 6, 8, 10 ou 20 tirages. Le participant exprime son choix en marquant d'une croix en forme de « x » la case appropriée.

Art. 7. Le bulletin multiple comporte 1 grille à 42 cases numérotées de 1 à 42.

Sur le bulletin figure également, à gauche de la grille, un cadre comportant 7 cases distinctes où sont mentionnés les nombres 8, 9, 10, 11, 12, 13 ou 14. Elles indiquent le nombre de numéros à choisir sur la grille au prorata de la mise concernée. Le montant de celle-ci figure en regard de chaque case pour une participation à un tirage et est fixé à 280 F, 840 F, 2.100 F, 4.620 F, 9.240 F, 17.160 F ou 30.030 F pour respectivement un choix de 8, 9, 10, 11, 12, 13 ou 14 numéros.

...

Le participant marque, dans le cadre approprié, d'une croix en forme de « x », celle des 7 cases distinctes déterminant le nombre de numéros à choisir sur la grille. Sur la grille, il trace une croix en forme de « x » dans les cases correspondant aux numéros de son choix.

...

Art. 8. Le bulletin multiplus comporte 10 grilles à 42 cases numérotées de 1 à 42. Les grilles sont groupées en 5 groupes de 2 grilles superposées.

La participation se fait obligatoirement par groupes de 2 grilles superposées. Selon sa mise, le participant remplit, en commençant par la gauche 1, 2, 3, 4 ou 5 groupes de 2 grilles superposées.

En bas de chaque groupe de 2 grilles superposées sont mentionnés, chacun dans une case, les nombres 7, 8, 9, ou 10 qui indiquent le nombre de numéros à choisir sur les grilles au prorata de la mise concernée. Le montant de celle-ci figure en regard de chacun de ces nombres pour une participation à un tirage.

Pour une participation à un tirage :

- 1° le choix de 7 numéros par grille donne lieu à une mise de respectivement 140 F, 280 F, 420 F, 560 F ou 700 F pour 2, 4, 6, 8 ou 10 grilles ;
- 2° le choix de 8 numéros par grille donne lieu à une mise de respectivement 560 F, 1.120 F, 1.680 F, 2.240 F ou 2.800 F pour 2, 4, 6, 8 ou 10 grilles ;
- 3° le choix de 9 numéros par grille donne lieu à une mise de respectivement 1.680 F, 3.360 F, 5.040 F, 6.720 F ou 8.400 F pour 2, 4, 6, 8 ou 10 grilles ;
- 4° le choix de 10 numéros par grille donne lieu à une mise de respectivement 4.200 F, 8.400 F, 12.600 F, 16.800 F ou 21.000 F pour 2, 4, 6, 8 ou 10 grilles ;

...

Art. 9. En participant au Lotto selon la formule des bulletins du type « simple », on réalise par grille un seul ensemble de 6 numéros qui représente un pronostic.

En participant selon la formule des bulletins des types « multiple » ou « multiplus », on réalise conventionnellement par grille tous les ensembles de 6 numéros pouvant résulter des 7 à 14 numéros considérés. Chacun de ces ensembles de 6 numéros représente un pronostic.

De 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 ou 14 numéros résultent respectivement 7, 28, 84, 210, 462, 924, 1.716 ou 3.003 ensembles de 6 numéros.

La mise pour un pronostic correspond à 10 F.

...

Art. 15. Le tirage du Lotto est effectué au moyen d'un tambour. Quarante-deux boules, de matière, de volume et de poids identiques et numérotées de 1 à 42, sont introduites dans le tambour. Sept boules sont extraites successivement. Une boule extraite ne peut être remise dans le tambour. Les six premières boules extraites déterminent les numéros gagnants. La septième boule extraite détermine un numéro, appelé « numéro complémentaire ».

Les boules sont mélangées avant chaque extraction.

...

Art. 16. Donnent droit à un lot, les ensembles dans lesquels figurent, d'après les résultats du tirage :

- les 6 numéros gagnants ;
- 5 numéros gagnants, plus le numéro complémentaire ;
- 5 numéros gagnants ;
- 4 numéros gagnants ;
- 3 numéros gagnants ;

Chaque ensemble n'est classé qu'une seule fois et ce à raison du plus grand nombre de numéros gagnants qu'il comporte, nombre auquel s'ajoute le numéro complémentaire lorsqu'il figure dans un ensemble comportant 5 numéros gagnants.

Art. 17. Cinquante p.c. des mises acceptées sont attribués aux lots, d'après les modalités suivantes :

- 1° le lot attribué à chacun des ensembles qui comportent 3 numéros gagnants est fixé forfaitairement à 50 F ; la part attribuée globalement à ces lots correspond donc au produit de la multiplication de 50 F par le nombre d'ensembles comportant 3 numéros gagnants ;
- 2° les autres ensembles gagnants se partagent le solde dans la proportion suivante :
 - a) 45 p.c. pour les ensembles comportant les 6 numéros gagnants ;
 - b) 10 p.c. pour les ensembles comportant 5 numéros gagnants, plus le numéro complémentaire ;
 - c) 20 p.c. pour les ensembles comportant 5 numéros gagnants ;
 - d) 25 p.c. pour les ensembles comportant 4 numéros gagnants ;

La part globalement attribuée aux ensembles comportant respectivement les 6 numéros gagnants, 5 numéros gagnants plus le numéro complémentaire, 5 numéros gagnants ou 4 numéros gagnants est chaque fois répartie en parts égales entre les ensembles gagnants de même type.

...

Art. 18. Lorsque le tirage du mercredi ne désigne aucun ensemble comportant les 6 numéros gagnants, la part globalement attribuée à ces ensembles est affectée à la part globalement attribuée aux ensembles comportant les 6 numéros gagnants du prochain tirage du mercredi qui désignera au moins un ensemble gagnant de ce type.

Lorsque le tirage du samedi ne désigne aucun ensemble comportant les 6 numéros gagnants, la part globalement attribuée à ces ensembles est affectée à la part globalement attribuée aux ensembles comportant les 6 numéros gagnants du prochain tirage du samedi qui désignera au moins un ensemble gagnant de ce type.

Lorsqu'un tirage ne désigne aucun ensemble comportant 5 numéros gagnants plus le numéro complémentaire, la part globalement attribuée à ces ensembles est ajoutée à la part globalement attribuée aux ensembles comportant 5 numéros gagnants de ce tirage.

Lorsqu'un tirage ne désigne aucun ensemble comportant 5 numéros gagnants, la part globalement attribuée à ces ensembles est ajoutée à la part globalement attribuée aux ensembles comportant 4 numéros gagnants de ce tirage.

Lorsqu'un lot attribué à un ensemble déterminé est plus élevé qu'un lot attribué à un ensemble comportant un nombre supérieur de numéros gagnants, les sommes globalement attribuées aux ensembles concernés sont additionnées et le total ainsi obtenu est réparti en parts égales entre les ensembles gagnants concernés, étant entendu que ce principe est également applicable lorsqu'un lot attribué à un ensemble comportant 5 numéros gagnants est supérieur au lot attribué à un ensemble comportant 5 numéros gagnants, plus le numéro complémentaire.



LES POSSIBILITES DE GAINS AVEC LES BULLETINS MULTIPLES.

Chiffres exacts	Nombre de lots gagnants par rang									
	Mise	70F	280F	840F	2.100F	4.620F	9.240F	17.160F	30.030F	
Croix		7	8	9	10	11	12	13	14	
Comb.		7	28	84	210	462	924	1.716	3.003	
Rang										
6 +	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
	2	6	6	6	6	6	6	6	6	
	3		6	12	18	24	30	36	42	
	4		15	45	90	150	225	315	420	
	5		—	20	80	200	400	700	1.120	
6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
	2	6	12	18	24	30	36	42	48	
	3	—	15	45	90	150	225	315	420	
	4	—	—	20	80	200	400	700	1.120	
	5	—	—	—	—	—	—	—	—	
5 +	2	1	1	1	1	1	1	1	1	
	3	1	2	3	4	5	6	7	8	
	4	5	15	30	50	75	105	140	180	
	5	—	10	40	100	200	350	560	840	
	3	2	3	4	5	6	7	8	9	
5	4	5	15	30	50	75	105	140	180	
	5	—	10	40	100	200	350	560	840	
	4	3	6	10	15	21	28	36	45	
	5	4	16	40	80	140	224	336	480	
	5	4	10	20	35	56	84	120	165	

En consultant ce tableau vous verrez immédiatement combien de fois vous pouvez gagner dans chaque rang si vous retrouvez un certain nombre de chiffres exacts sur votre grille. Ceci tout en ne cochant qu'une grille de minimum 7 et maximum 14 croix.

Université libre de Bruxelles
Centre de Documentation Pédagogique - CeDoP
CP 186 - avenue F.D. Roosevelt, 50 - 1050 Bruxelles
☎ 02/650 40 35

Dépôt légal D/1996/6890/8
Prix de vente : 70 FB