Renée GOSSEZ
Jacqueline SENGIER

ULB

L'OMBRE A LA LAMPE SUR LA TI 92

centre de documentation pédagogique

Les Cahiers du CeDoP

Collection : Les Cahiers du CeDoP

ISBN 2-930089-62-8

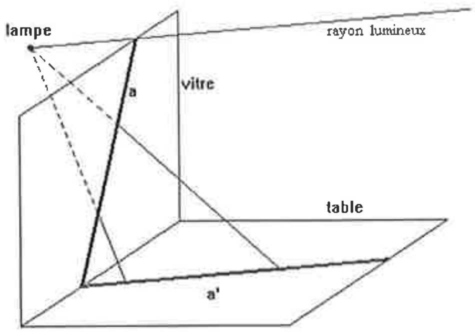
L' OMBRE A LA LAMPE SUR LA TI 92.

Renée Gossez, Athénée Royal d'Uccle 1, Bruxelles.
Jacqueline Sengier, Université Libre de Bruxelles.

1. Résumé.[1]

L'observation des ombres de droites et de cercles situés dans le faisceau d'une lampe ponctuelle débouche sur l'étude de notions mathématiques aussi variées que les propriétés d'incidence et de parallélisme de droites et de plans de l'espace, la projection centrale et ses invariants, les coniques comme sections de cônes.
Le matériel expérimental que nous utilisons dans un premier temps n'est pas suffisamment sophistiqué pour permettre une exploration détaillée de toutes les propriétés géométriques à découvrir.
Nous simulons donc l'expérience à l'aide du calculateur symbolique et de l'application « géométrie » de la calculatrice TI 92 .

2. Introduction.



Matériel expérimental : vitre posée verticalement sur une table, lampe ponctuelle.

Figure 1

L'observation des ombres, à la lampe ponctuelle, de figures placées sur une vitre, s'intègre
- dans un premier temps, au cours de géométrie de l'espace figurant au programme de mathématique de 4ème année . En effet, les propriétés d'incidence et de parallélisme de droites et de plans permettent d'expliquer tous les phénomènes observés lorsqu'il s'agit d'ombres de droites.
- dans un deuxième temps, au chapitre des transformations de l'espace et à celui des coniques que l'on étudie en 5ème et 6ème années . Dans les pages qui suivent nous illustrerons l'aspect application de la géométrie de l'espace par un seul exemple. Nous développerons davantage l'aspect transformation de l'espace pour lequel l'utilisation de la calculatrice est indispensable.

Le sujet a été expérimenté dans une classe où les élèves ne disposaient pas encore individuellement d'une calculatrice. La TI 92 version rétroprojetable a donc été utilisée par le professeur comme complément au tableau noir suivant un scénario qui sera décrit dans cet article. Mais on peut facilement adapter ce scénario de manière à ce que des élèves qui possèdent une certaine pratique de la TI 92 travaillent eux-mêmes avec la calculatrice.

3 . L'ombre à la lampe: une application de la géométrie de l'espace.

Lors de la phase d'observation sur le matériel expérimental nous constatons entre autres que l'ombre d'une droite oblique (donc non horizontale) placée sur la vitre est une droite parallèle au rayon lumineux horizontal qui touche la droite (figures 1 et 2) et que les ombres de droites non horizontales de direction δ sont des droites sécantes (figure 2) [Cuis & al 95].

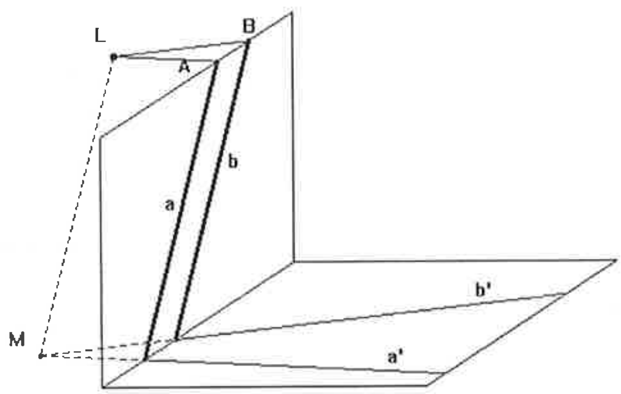


Figure 2

Ces deux observations s'expliquent aisément par les propriétés d'incidence et de parallélisme de droites et de plans de l'espace :

1) Soit η le plan horizontal dans lequel est située la lampe (il est matérialisé ici par les points L, A et B). Soit β le plan (L, b). Ce plan contient tous les rayons lumineux qui touchent la droite b. Nous l'appellerons plan de lumière de b. Soit τ le plan de la table. L'ombre b' de la droite b est l'intersection du plan de lumière β avec le plan τ.

Comme les intersections de deux plans parallèles avec un même troisième sont des droites parallèles, $b' = \beta \cap \tau$ et $LB = \beta \cap \eta$ sont parallèles. L'ombre de b est donc parallèle au rayon lumineux horizontal LB qui touche b.

2) Soient a et b deux droites parallèles de direction δ, sur la vitre. Appelons α et β leurs plans de lumière respectifs. Soit d la parallèle à a menée par L dans α. Soit d' la parallèle à b menée par L dans β. Par transitivité du parallélisme de droites, $d\,//\,d'\,//\,a\,//\,b$. Par l'axiome d'Euclide d = d'. Il résulte de ceci que $\alpha \cap \beta = d = d' = LM$ où M est le point de percée de d dans τ. Nous savons que les intersections de deux plans sécants α et β avec un troisième plan

τ qui coupe leur intersection LM en M sont des droites concourantes en M. Par conséquent $a' = \alpha \cap \tau$ et $b' = \beta \cap \tau$ sont des droites qui passent par M.

Cette démonstration nous donne une nouvelle information, impossible à observer avec le matériel expérimental, trop simple : le point M d'intersection des ombres a' et b' est la projection de la lampe L sur la table, parallèlement à la direction commune, δ, des droites a et b.

Une nouvelle question se pose alors :
quel est le lieu du point M lorsque δ varie?
Il est aisé de démontrer, toujours par les propriétés de droites et de plans, que ce lieu est la droite l d'intersection du plan de la table avec le plan parallèle à la vitre par L (figure 3).

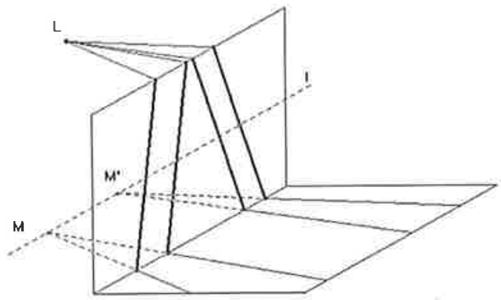


Figure 3

4. L'ombre à la lampe: une transformation de l'espace.

Nous pouvons considérer que l'ombre d'un point A de la vitre est l'image de A par une *projection centrale* de centre L, appliquant le plan de la vitre sur celui de la table.

Grâce aux observations précédentes, nous avons l'intuition que cette transformation conserve les droites mais qu'elle ne conserve ni le parallélisme ni le fait d'être sécant. Les élèves sont très étonnés... toutes les transformations qu'ils connaissent conservent ces propriétés ! Il est donc tout-à-fait légitime qu'ils se demandent ce qu'il en est des distances, du milieu d'un segment, du rapport de section d'un point par rapport à un couple de points,...

Le matériel expérimental dont nous disposons n'est pas suffisamment sophistiqué pour que nous puissions pousser beaucoup plus loin notre exploration. Nous allons donc procéder analytiquement et *simuler* l'expérience à l'aide d'une calculatrice symbolique et graphique.

4.1. Equations de la projection centrale [Cast & al 76].

Choisissons (Rx, Ry) comme système de coordonnées dans la vitre et (L'x',L'y') comme système de coordonnées dans le plan de la table conformément à la figure 4.

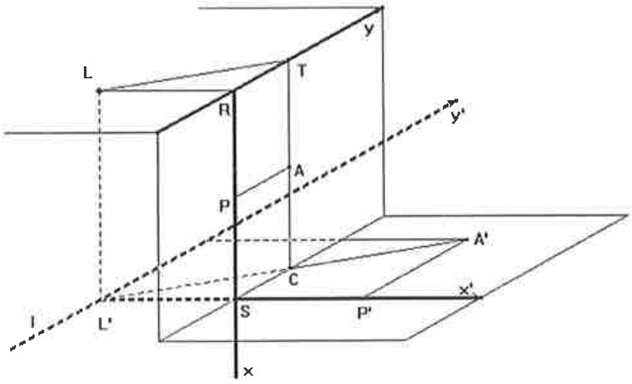


Figure 4

Le plan Lx est perpendiculaire à celui de la table et x' est l'ombre de x, l'axe y est l'intersection du plan de la vitre avec le plan horizontal passant par la lampe L tandis que l'axe y' est la droite l introduite dans la figure 3.

Il est aisé de montrer que si $A'(x',y')$ est l'ombre de A (x, y) alors

$$\begin{cases} x' = \dfrac{e.h}{x} \\ y' = \dfrac{h.y}{x} \end{cases}$$

où $e = |LR|$ et $h = |LL'|$ (voir figure 4).

4.2. Simulation de l'ombre à l'aide de la TI 92.

Grâce à ces nouveaux outils (équations de la projection et TI 92) nous pouvons définir un point de la vitre par ses coordonnées, une droite ou une courbe par son équation, calculer les coordonnées de l'ombre du point, établir l'équation de l'ombre de la droite ou de la courbe et représenter le tout, graphiquement.

4.2.1. Ombre d'un parallélogramme.

A gauche : sur la vitre, un parallélogramme et les droites contenant ses côtés.
A droite : l'ombre du parallélogramme et les ombres des droites contenant ses côtés.

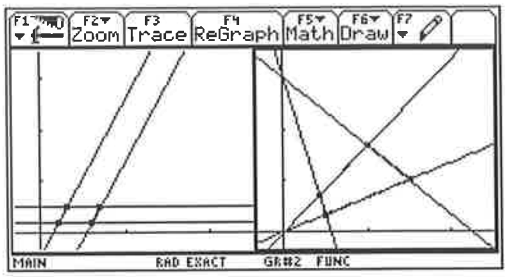


Figure 5

Comme nous pouvions nous y attendre, les ombres de droites parallèles sont des droites qui se coupent sur l'axe y', c'est-à-dire sur la droite l de la figure 3.

4.2.2. Rapport de section... conservé ou non ?

A gauche : sur la vitre, deux points et le point milieu.
A droite : les ombres des trois points. Nous constatons que le milieu n'est pas conservé, à fortiori, le rapport de section non plus.

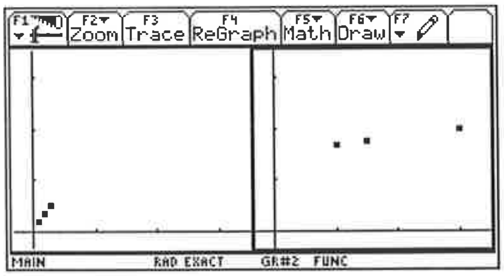


Figure 6

Qu'advient-il alors de ce rapport ?

Lignes 1 et 2 : résultats d'une séquence de calculs qui fournit les rapports de section de deux points de la vitre, nommés 3 et 4 par rapport à deux autres points nommés 1 et 2.
Lignes 3 et 4 : résultats de la même séquence de calculs qui donne cette fois les rapports de section des ombres de 3 et 4 par rapport aux ombres de 1 et 2.

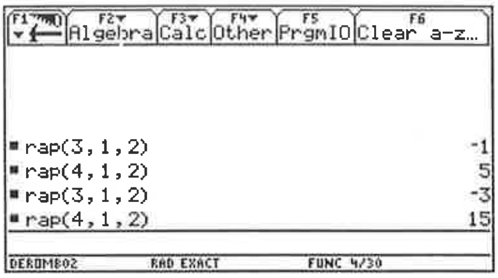


Figure 7

Les élèves voient immédiatement que le quotient des deux rapports de section, c'est-à-dire le *birapport*, semble être conservé.

Après avoir consacré le temps nécessaire à la démonstration proprement dite (papier, crayon) des propriétés découvertes ci-dessus au cours de la phase d'exploration avec la calculatrice, nous concluons: la projection centrale est une transformation dans laquelle les droites et le birapport sont invariants mais ni le parallélisme, ni le rapport de section ne sont conservés.

Nous reprenons alors la TI 92 pour vérifier une conjecture proposée par les élèves, à savoir que l'ombre d'un cercle est une ellipse.

5. L'ombre à la lampe: une rencontre avec les coniques.

Question : quelle est l'ombre d'un cercle ?
Sur ce point, la classe se divise en deux parties : les élèves d'un côté, le professeur de l'autre ! Les paris sont ouverts. Pour les élèves, l'ombre d'un cercle est une ellipse. Le professeur quant à lui, émet des doutes. Les figures suivantes représentent un cercle dans les axes (x, y), à gauche, son ombre dans les axes (x', y'), à droite.

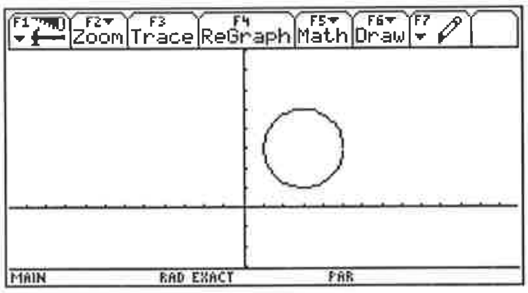


Figure 8

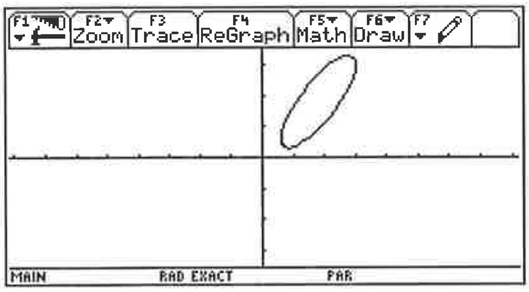


Figure 9

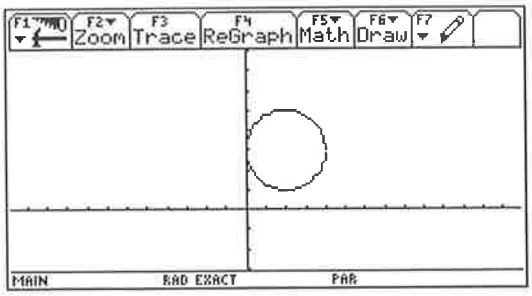


Figure 10

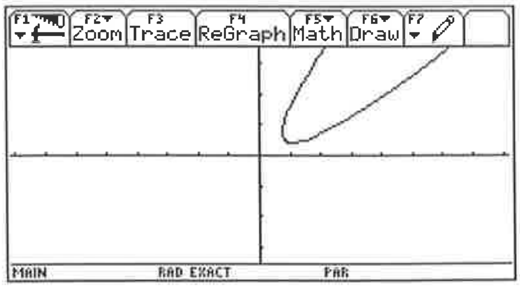


Figure 11

Qui donc a raison ? l'ombre est une ellipse...

Les élèves ricanent... ils sont persuadés que c'est la fenêtre qui est mal choisie !

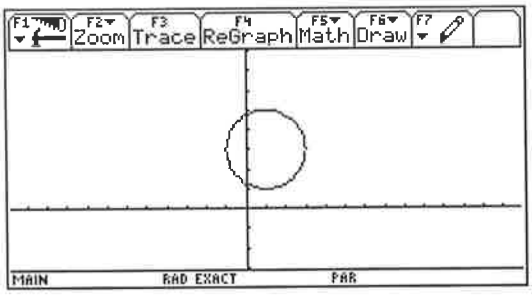


Figure 12

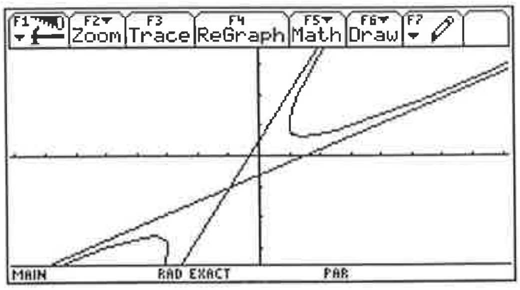


Figure 13

Perplexité dans l'auditoire...

Voici une belle occasion d'introduire les coniques en faisant référence à Apollonius ! L'ombre d'un cercle n'est rien d'autre que la section par le plan de la table, du cône formé par les rayons lumineux qui touchent le cercle. Elle peut donc être une ellipse, une parabole ou une hyperbole.

6. Une représentation en vraie grandeur de l'ombre d'une figure.

Il est possible d'obtenir une représentation en vraie grandeur de figures et de leur ombre [Cuis & al 95] :
Prenons une feuille de papier cartonné et plions-la de manière à avoir une représentation spatiale du matériel expérimental, à savoir, la table, la vitre et le plan horizontal qui contient la lampe (figure 14).

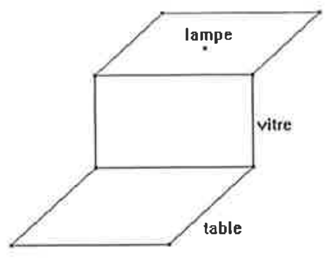


Figure 14

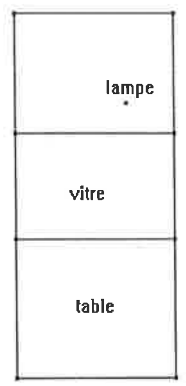


Figure 15

Déplions cette feuille de papier cartonné pour obtenir une représentation plane de l'expérience, dans laquelle toutes les figures apparaissent en vraie grandeur (figure 15).

Dans cette représentation, nous obtenons l'ombre d'' de la droite d = AB en traçant la parallèle au rayon lumineux LA par B. L'ombre Q du point P de la droite AB est l'intersection de d'' avec le rayon lumineux LP. La figure 16 donne une représentation en vraie grandeur des ombres de la droite d et du point P.

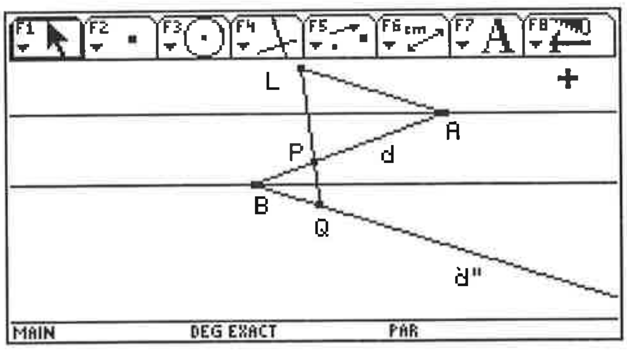


Figure 16

Lorsqu'un point de la vitre parcourt un cercle, son ombre parcourt l'ombre de ce cercle. Les figures 17 et 18 représentent cette ombre en vraie grandeur.

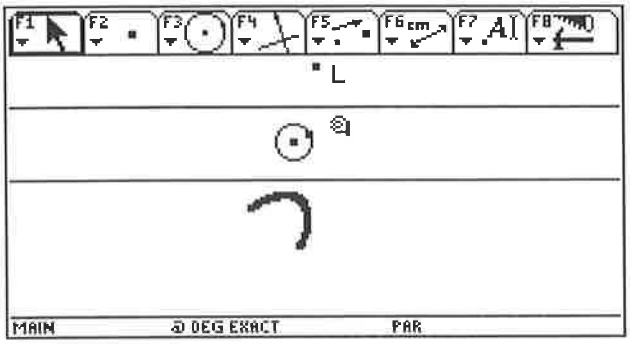


Figure 17

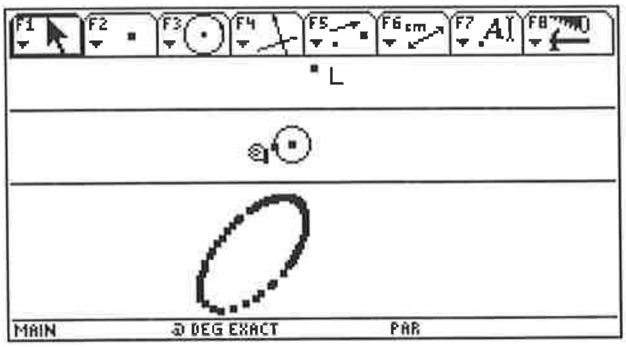


Figure 18

7. Développements possibles.

L'observation des ombres à la lampe ponctuelle de figures placées sur une vitre est une porte ouverte sur la recherche d'autres invariants de la projection centrale (coniques, tangentes à une courbe,...) et sur la géométrie projective (points à l'infini et droite de l'infini).

8. Bibliographie.

[Cast & al 76] E. Castelnuovo, C. et D. Gori - Giorgi,
La géométrie projective à l'école.
Educational Studies in Mathematics 7 (1976) - pages 443 à 463.

[Cuis & al 95] G. Cuisinier, D. Legrand, J. Vanhamme,
Géométrie de l'espace par le biais de l'ombre à la lampe.
Proposition 18 - GEM - Editions Erasme - Namur (1995).

Créé en octobre 1992, le CeDoP (Centre de Documentation pédagogique de l'ULB) édite et diffuse des documents pédagogiques originaux destinés aux professeurs de l'enseignement secondaire et supérieur. Ces publications, dont les supports se diversifient au gré de l'évolution technologique (fascicules, disquettes, CD-Rom, ...), sont réalisées grâce à l'étroite collaboration entre des professeurs de l'ULB et des professeurs et inspecteurs du secondaire et du supérieur. Ceux-ci se rencontrent dans le cadre d'ateliers ou de groupes permanents de réflexion et de travail. Les praticiens des différents niveaux d'enseignement peuvent y confronter leur expérience de terrain, échanger leurs points de vues sur la réalité scolaire, réfléchir ensemble aux problèmes soulevés par la transmission des connaissances et l'acquisition des savoir-faire.

Les disciplines actuellement couvertes par les Cahiers du CeDoP sont la biologie, la chimie, les mathématiques, la physique, l'histoire des sciences, l'éducation physique, les langues germaniques, les langues anciennes, le français, l'histoire et les sciences de l'éducation.

Depuis 1994, le CeDoP édite un catalogue. Ce catalogue a pour objectif de présenter aux différents acteurs de l'enseignement les publications nées du travail des ateliers. Il est envoyé à toutes les écoles secondaires et supérieures francophones, aux responsables des pouvoirs organisateurs, aux inspecteurs, aux échevins de l'instruction publique, aux diverses associations actives dans le domaine de l'enseignement (associations professionnelles, bibliothèques publiques, etc.), aux professeurs antennes de l'ULB et à toute personne qui en fait la demande (en majorité des enseignants). Grâce à un bon de commande qui y est joint, les professeurs et les établissements peuvent se procurer les publications qui les intéressent.

Depuis 1994 également, le CeDoP est présent à la semaine de l'Exposition des Sciences de l'ULB et lors des journées de contact (biologie, chimie, mathématique, physique, langues anciennes, ...) organisées par l'Université à l'intention des enseignants du secondaire et du supérieur. Il participe, en outre, à des manifestations externes à l'Université, telles le Congrès annuel des Sciences ou le Salon de l'Éducation de Namur.

Les pages suivantes présentent les ouvrages déjà publiés par les auteurs de ce cahier ainsi que les textes relatifs à la discipline qu'il concerne. Si vous le souhaitez, nous pouvons également vous faire parvenir le catalogue reprenant la liste des cahiers de toutes les disciplines.

AUTRES PUBLICATIONS EN RAPPORT AVEC CE CAHIER :

LE PROFESSEUR DE MATHEMATIQUES
Frederickx M.
30fb+20fb (port)

LIEUX GEOMETRIQUES FACILES… MAIS DEROUTANTS
Frederickx M.
60fb+40fb (port)

HISTOIRE DES MATHEMATIQUES. BIBLIOGRAPHIE COMMENTEE A L'ATTENTION DES ENSEIGNANTS ET DE LEURS ELEVES
Bouckaert Ch., Buekenhout Fr.
200fb+60fb (port)

LES TRIBULATIONS DE L'EQUATION DU SECOND DEGRE
Lartillier M.
150fb+90fb (port)

COURS DE MATHEMATIQUE DU SECONDAIRE
Hubaut X.
150fb+50fb (port)

DEVELOPPER LE CONCEPT DE NOMBRE DEPUIS LES METHODES INTUITIVES JUSQU'AUX ALGORITHMES ET LA RATIONALISATION
Bouckaert Ch.
100fb+30fb (port)

LA TRADITION MATHEMATIQUE
Buekenhout Fr.
30fb+20fb (port)

LE CAS DE LA GEOMETRIE
Parker M.
120fb+35fb (port)

UNE ETUDE DE CONIQUES… POUR NE PAS TOMBER EN PANNE DE KEROSENE
Frederickx M.
30fb+20fb (port)

MODELISER LES STRATEGIES FACE A UN TEST A CHOIX MULTIPLE
Frederickx M.
40fb+20fb (port)

LES DERIVEES ET…LES BOITES DE CONSERVES
Frederickx M. , Parker M.
30fb+20fb (port)

SUITES DE POLYGONES
Frederickx M.
40fb+20fb (port)

L'HISTOIRE DES LOGARITHMES
Trompler S.
100fb+35fb (port)

APPRENDRE A PARLER GRAPHIQUE
Frederickx M. , Parker M.
100fb+35fb (port)

HUIT QUESTIONS A PROPOS DU LOTTO
Parker M.
70fb+35fb (port)

L'ELLIPSE OU LA RENCONTRE D'UN SPIROGRAPHE, D'UNE ECHELLE
QUI TOMBE ET D'UNE ATTRACTION FORAINE
Bouckaert Ch., Frederickx M.
100fb+35fb(port)

Du/des même(s) auteur(s) :

QUELQUES PROPOSITIONS DE LECONS INTEGRANT LE LOGICIEL
DERIVE. PARTIE 1 : LES INTEGRALES
Gossez R. , Sengier J.
100fb+35fb (port)

QUELQUES PROPOSITIONS DE LECONS INTEGRANT LE LOGICIEL
DERIVE. PARTIE 2 :
A PROPOS DES FONCTIONS
Gossez R. , Sengier J.
70fb+35fb (port)

UTILISATION DU LOGICIEL DERIVE EN ALGEBRE LINEAIRE
Gossez R. , Sengier J.
70fb+35fb (port)

Université libre de Bruxelles
Centre de Documentation Pédagogique - CeDoP
CP 178 - avenue F.D. Roosevelt, 50 - 1050 Bruxelles
✆ 02/650 40 35

Dépôt légal D/2000/6890/3
Prix de vente : 0,50€) BEF)