Monique FRÉDÉRICKX
Monique PARKER

ULB

Les dérivées et ...
les boîtes de conserve

UREM

Unité de Recherche
sur l'Enseignement des Mathématiques

Les Cahiers du CeDoP

centre de documentation pédagogique

Mise en page : Marie-Line Haesevelde
Graphiques : Nicole Cardon
Collection : Les Cahiers du CeDoP

ISBN 2-930089-12-1

MATHÉMATIQUE

LES DÉRIVÉES ET ... LES BOÎTES DE CONSERVE

PLAN

1. **Minimiser la surface d'une boîte cylindrique**
2. **Le problème des déchets de métal**
3. **Le recyclage des déchets**
4. **La surface en fonction du rapport h/r**
5. **La réalité économique**

Niveau : 5e année (toute section)

Objectif : présenter un problème concret impliquant une recherche de minimum.

Frédérickx M.
Parker M.

UREM

Unité de Recherche
sur L'Enseignement des Mathématiques

Professeurs
Fr. Buekenhout, M. Parker, J. Sengier

CAMPUS PLAINE C.P. 216
BD DU TRIOMPHE
B-1050 BRUXELLES
Tél. (32) (2) 650 58 71 (Secrétariat 650 58 64)
e-mail ulbmath @ ulb.ac.be
Telex Unilib B 23069
Fax (32) (2) 650 58 99

MATHÉMATIQUE

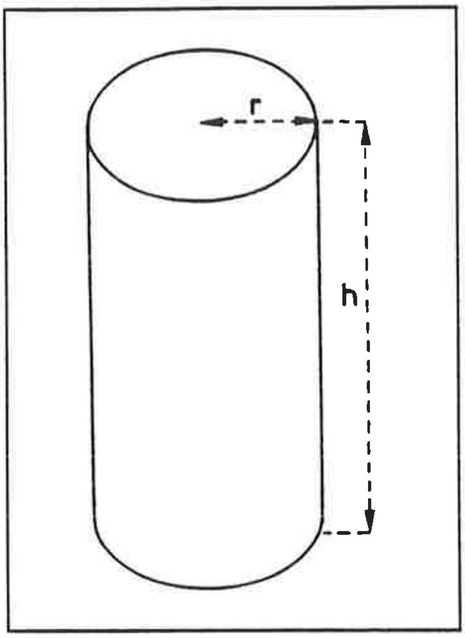
LES DÉRIVÉES ET ...
LES BOÎTES DE CONSERVE

Frédérickx M.
Parker M.

1. Minimiser la surface d'une boîte cylindrique

Comment construire une boîte de conserve cylindrique d'un litre en utilisant le moins de métal possible ?

Choisissons d'exprimer r et h en dm.



On a la relation $V = \pi r^2 h = 1$ d'où on déduit que $h = \dfrac{1}{\pi r^2}$. (1)

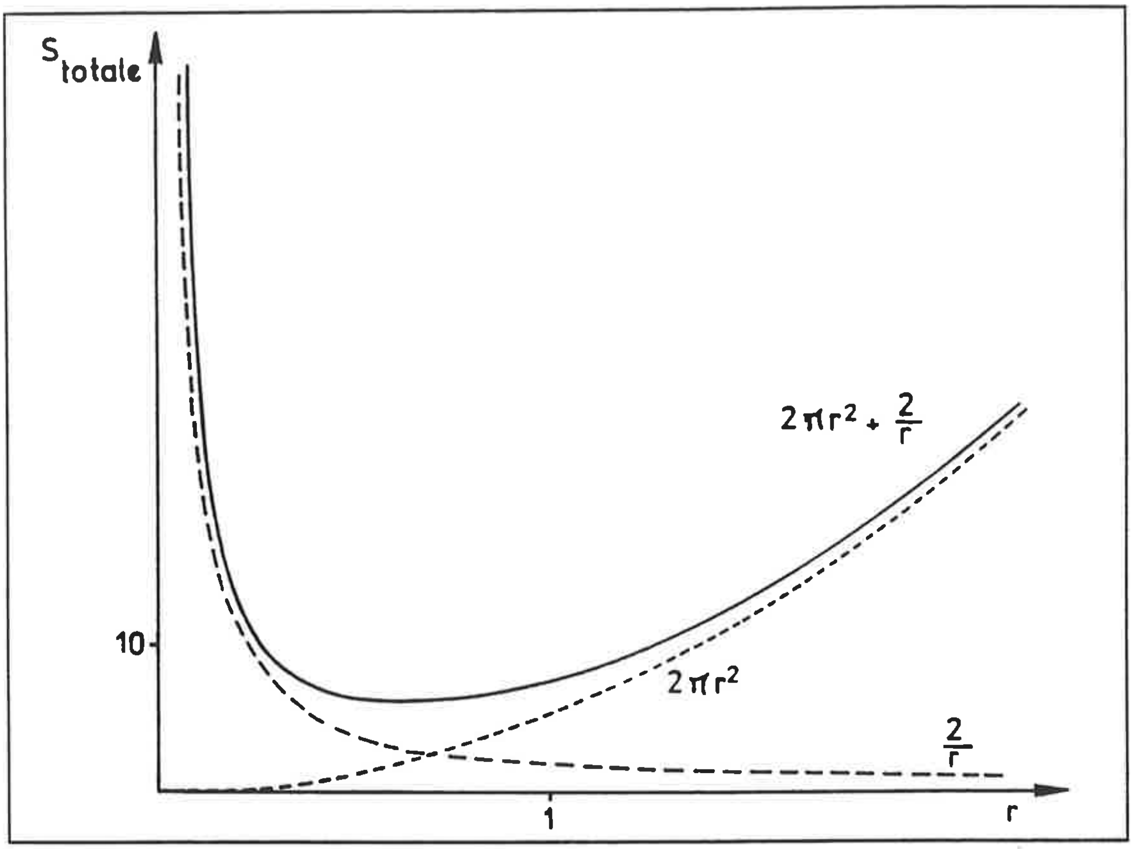
La surface totale de métal utilisé vaut $S_{\text{totale}} = 2 \pi r^2 + 2 \pi r h$

ou encore vu (1) $S_{\text{totale}} = 2 \pi r^2 + \dfrac{2}{r}$.

La dérivée de cette fonction par rapport à la variable r vaut

$$\frac{d S_{\text{totale}}}{d r} = 4 \pi r - \frac{2}{r^2} = \frac{4 \pi r^3 - 2}{r^2}.$$

r	$r < r_1$	$r = r_1 = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2 \pi}}$	$r > r_1$
$\dfrac{dS}{dr}$	< 0	0	> 0
S	fonction décroissante	minimum	fonction croissante



L'étude de cette fonction S nous donne la valeur de r pour laquelle la surface de métal à utiliser est minimale :

$r_1 = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} \cong 0,54$ dm

avec, vu **(1)** $h_1 = \dfrac{2}{\sqrt[3]{2\pi}} = 2\,r_1 \cong 1,08$ dm

et S minimale $= 3 \, . \sqrt[3]{2\pi} \cong 5,54$ dm^2.

Il est à noter que l'égalité entre le diamètre et la hauteur de la boîte de surface totale minimale est vraie quel que soit le volume imposé à la boîte.

MATHÉMATIQUE

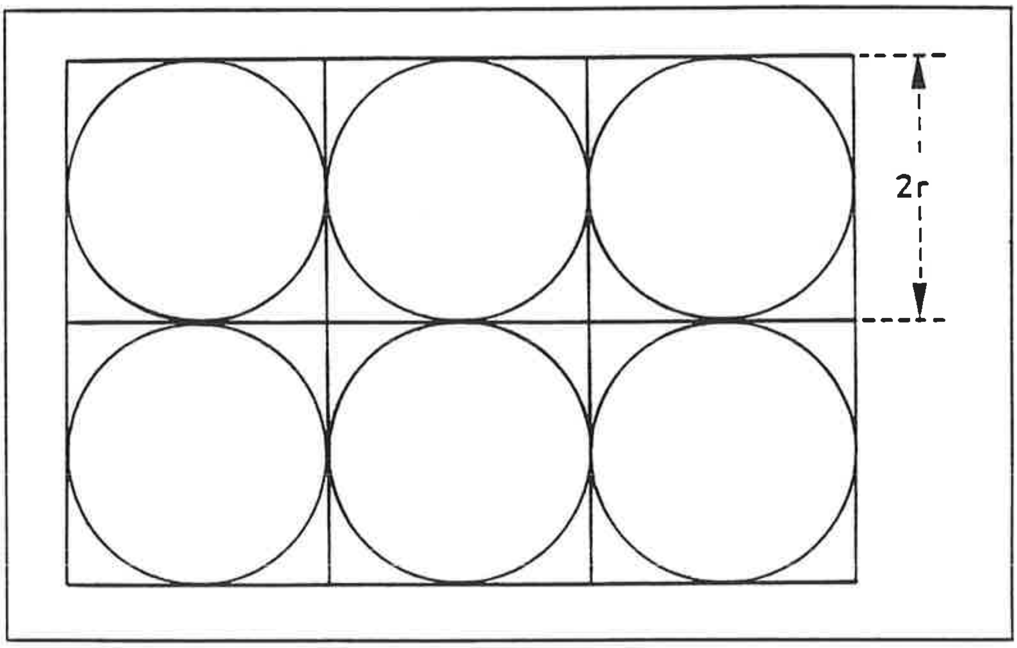
LES DÉRIVÉES ET ... LES BOÎTES DE CONSERVE

Frédérickx M.
Parker M.

2. Le problème des déchets de métal

La solution proposée ci-dessus n'est valable que si l'on ne tient pas compte des **déchets** lors de la découpe du métal, ou encore, si ceux-ci pouvaient être recyclés sans frais pour faire d'autres boîtes de conserve. Dans le cas contraire, **quel modèle mathématique pourrait tenir compte des déchets occasionnés par la découpe du métal ?**

En ce qui concerne la surface latérale des boîtes, on peut considérer qu'il n'y a pas de déchet vu qu'on l'obtient au moyen d'une surface rectangulaire de métal.
On peut construire les couvercles à partir de **carrés** ayant une longueur 2 r pour côtés. Dans ce cas, nous pouvons nous reposer la question initiale : **comment construire une boîte de conserve d'un litre en utilisant le moins de métal possible ?**

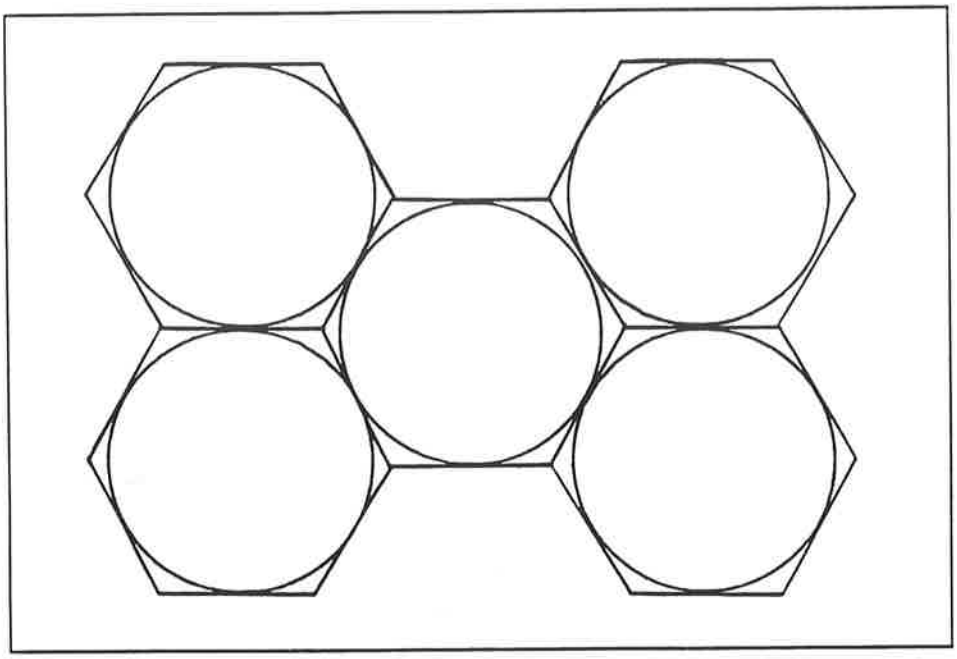


La surface de métal utilisée pour chaque cercle vaut dans ce cas $4r^2$ et il y a $4r^2 - \pi r^2 = (4 - \pi) r^2$ **(2)** de déchet de métal non réutilisable pour chaque couvercle.
La surface de métal utilisée pour construire une boîte de conserve est alors de

$$S\text{ totale} = 8r^2 + \frac{2}{r},$$

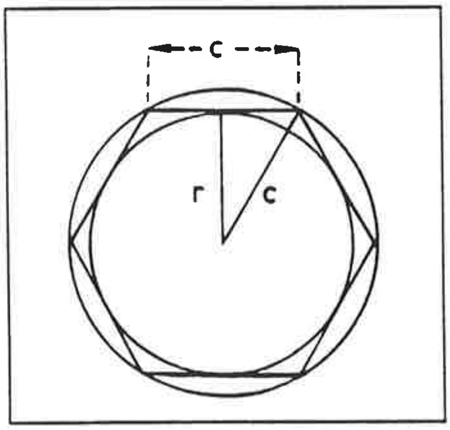
dont la dérivée $\dfrac{d\,S\text{ totale}}{d\,r} = 16r - \dfrac{2}{r^2} = \dfrac{16r^3 - 2}{r^2}$,
nous fournit les dimensions de la boîte utilisant le minimum de métal :
$r_2 = \dfrac{1}{2}$ dm avec, vu **(1)** $h_2 = \dfrac{4}{\pi} \cong 1,27$ dm et S minimale $= 6,00\ \text{dm}^2$.

La quantité de déchet de métal peut être diminuée si les cercles utilisés pour faire les couvercles des boîtes de conserve sont extraits d'**hexagones**.



Nous ferons l'hypothèse que la surface de métal d'où sont extraits les hexagones est assez grande que pour pouvoir négliger les déchets extérieurs aux hexagones, sur le pourtour de la surface de métal.

À nouveau, reposons-nous la question : **comment construire une boîte de conserve d'un litre en utilisant le moins de métal possible ?**



Si c est le côté de l'hexagone qui circonscrit le cercle de rayon r, nous avons la relation $r^2 + \frac{c^2}{4} = c^2$ ou $c = \frac{2\sqrt{3}}{3} r$.

La surface de l'hexagone vaut donc $2\sqrt{3}\, r^2$ et le déchet de métal par couvercle sera de $2\sqrt{3}\, r^2 - \pi r^2 = (2\sqrt{3} - \pi)\, r^2$.

Frédérickx M.
Parker M.

En comparant ce résultat à (2), on voit que la découpe hexagonale est plus avantageuse que la précédente.

La surface totale de métal utilisé vaut cette fois S totale $= (4\sqrt{3}\,r^2 + \frac{2}{r})$

et on a $\frac{\text{d S totale}}{\text{d}\,r} = 8\sqrt{3}\,r - \frac{2}{r^2} = \frac{8\sqrt{3}\,r^3 - 2}{r^2}$.

Les dimensions de la boîte utilisant le minimum de métal valent donc :

$r_3 = 2^{-\frac{2}{3}} \,.\, 3^{-\frac{1}{6}} \cong 0{,}52$ dm,

$h_3 = \frac{2^{\frac{4}{3}} \,.\, 3^{\frac{1}{3}}}{\pi} \cong 1{,}16$ dm

et S minimale $\cong 5{,}72$ dm^2

3. Le recyclage des déchets

Dans le cas où l'usine peut recycler les déchets, le problème est à envisager différemment.

Supposons qu'étant donnés les frais de recyclage, les déchets soient vendus au dixième du prix du métal laminé en bandes rectangulaires.
Dans le premier cas, cas où les cercles des couvercles sont extraits de carrés, le prix d'une boîte de conserve serait proportionnel à

$$P_1 = 8\,r^2 + \frac{2}{r} - \frac{1}{10}(8 - 2\,\pi)\,r^2$$

avec $P_1' = (16 - \frac{16}{10} + \frac{4\,\pi}{10})\,r - \frac{2}{r^2} = \frac{(72 + 2\,\pi)\,r^3 - 10}{5\,r^2}$

et P_1 minimal $\cong 5{,}96$ dm^2

pour $r = \sqrt[3]{\frac{5}{36 + \pi}} \cong 0{,}50$ dm et $h = \frac{\sqrt[3]{(36 + \pi)^2}}{\pi\,\sqrt[3]{5^2}} \cong 1{,}25$ dm.

Dans le second cas, cas où les cercles des couvercles sont extraits d'hexagones, le prix d'une boîte de conserve serait proportionnel à

$$P_2 = 4\sqrt{3}\,r^2 + \frac{2}{r} - \frac{1}{10}(4\sqrt{3} - 2\,\pi)\,r^2$$

avec $P_2' = (8\sqrt{3} - \frac{8\sqrt{3} - 4\,\pi}{10})\,r - \frac{2}{r^2} = \frac{(36\sqrt{3} + 2\,\pi)\,r^3 - 10}{5\,r^2}$

et P_2 minimal $\cong 5{,}70$ dm^2

pour $r = \sqrt[3]{\frac{5}{18\sqrt{3} + \pi}} \cong 0{,}53$ dm et $h = 1{,}14$ dm.

4. La surface en fonction du rapport *h/r*

On constate que le problème des déchets, c'est-à-dire la forme des polygones dont sont extraits les cercles, ne modifie que peu **le rapport entre le rayon et la hauteur** de la boîte qui utilise le minimum de métal.

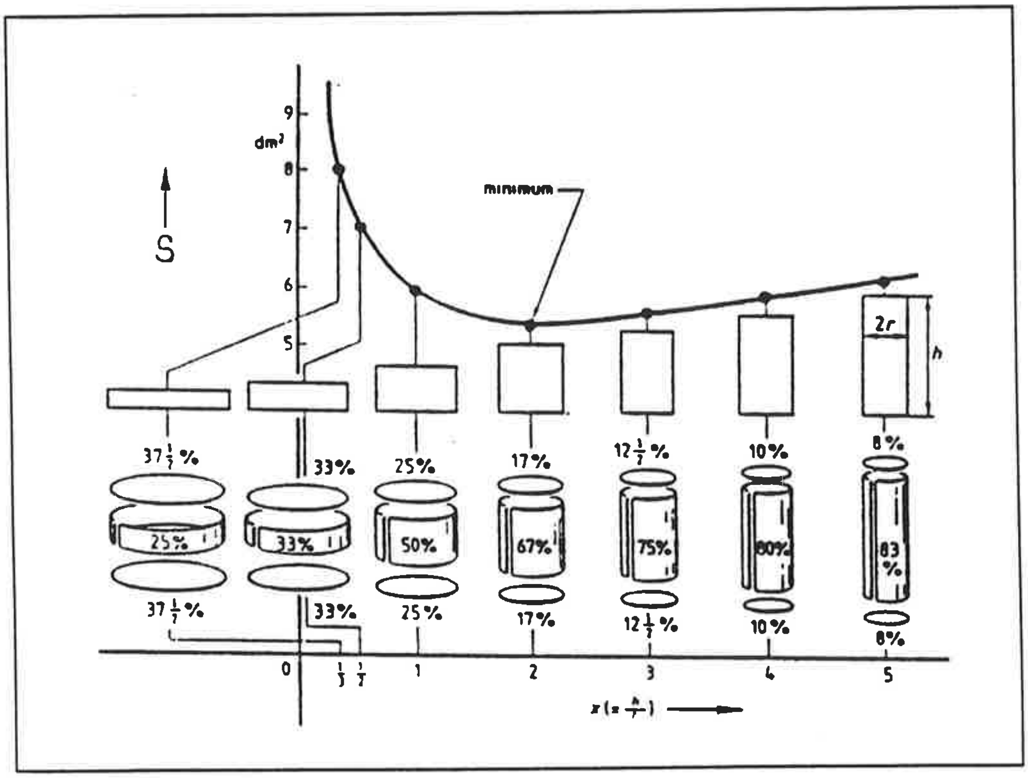
Or, le commerce offre des boîtes de conserve de dimensions fort variées.
Revenons à l'hypothèse simplificatrice qui ne tient compte que de la surface totale de la boîte de conserve et étudions comment varie la surface totale d'une boîte cylindrique de volume fixé en fonction du rapport
$x = \frac{h}{r}$.

On a $\quad V = \pi r^3 x = 1$ d'où $r = (\pi x)^{-\frac{1}{3}}$

et $\quad S = 2\pi r^2 (1 + x)$

donc $\quad S = 2 \cdot \pi^{\frac{1}{3}} \cdot x^{-\frac{2}{3}} \cdot (1 + x)$.

On retrouve le résultat obtenu précédemment, à savoir que S est minimum pour $x = 2$. Voici un graphique[1] de S en fonction de x :



[1]Extrait de Hewet Wiskunde - *Differentiëren 2 - 5/6 V A* - Educaboek, Culemborg.

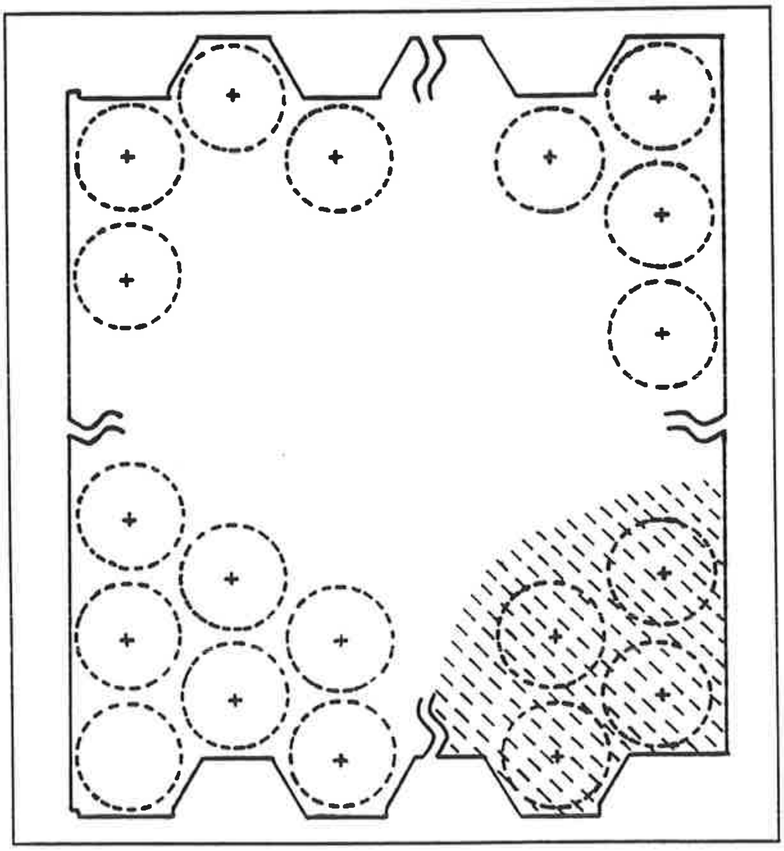
MATHÉMATIQUE

LES DÉRIVÉES ET ...
LES BOÎTES DE CONSERVE

Frédérickx M.
Parker M.

5. La réalité économique

Pourquoi toutes les boîtes de conserve que l'on trouve dans le commerce n'ont-elles pas les dimensions des différents modèles étudiés ci-dessus ?
Les firmes SOBEMI et MASSILY S.A. nous ont fourni quelques renseignements à ce propos : en réalité, certains facteurs doivent être pris en considération dans le choix des dimensions d'une boîte de conserve. Ainsi, le produit à conditionner détermine parfois la forme de la boîte ; c'est le cas, par exemple, pour les asperges. L'aspect marketing a lui aussi son importance : les boîtes hautes sont en effet plus vendues que les basses.
D'autre part, pour augmenter la solidité, on utilise parfois des métaux différents ou des feuilles de métal d'épaisseurs différentes pour les couvercles et pour la surface latérale. La matière de base pour la fabrication des boîtes se présente sous forme de rouleaux d'une dizaine de kilomètres de longueur et d'une largeur d'environ un mètre. De ces rouleaux, on coupe des plaques dont la longueur varie suivant qu'elles seront utilisées pour la fabrication des surfaces latérales ou pour la fabrication des couvercles. Les plaques destinées aux surfaces latérales sont découpées en rectangle et leur rendement est approximativement de 99 %.
Les plaques destinées aux couvercles sont souvent découpées de la façon suivante :



Leur rendement est compris entre 88 % et 96 %.
En général, les couvercles de la boîte sont plus épais que la face latérale : par exemple, pour une contenance d'un demi-litre, le métal utilisé pour la surface latérale a 0,16 mm d'épaisseur tandis que pour les couvercles, l'épaisseur est de 0,20 mm.

La firme SOBEMI nous signale encore que le coût de la matière première est environ 60 % du prix de fabrication et qu'après désétamage, les déchets sont utilisés comme matière première dans les fours métallurgiques. La vente de ces déchets permet seulement de couvrir les frais de transport de ceux-ci.

Nous remercions vivement les firmes HESBY FRUIT S.A., MASSILY S.A., RENA et SOBEMI d'avoir répondu à nos questions et de nous avoir fourni des renseignements fort intéressants.

La firme MASSILY nous a communiqué une enquête statistique sur le nombre de boîtes de différentes dimensions fabriquées au cours de l'année 1993. Ces données peuvent éventuellement être exploitées au cours de statistique. Les professeurs qui le souhaitent peuvent obtenir ces données en s'adressant à l'UREM.

Université libre de Bruxelles
Centre de Documentation Pédagogique - CeDoP
CP 186 - avenue F.D. Roosevelt, 50 - 1050 Bruxelles
✆ 02/650 40 35

Dépôt légal D/1995/6890/12
Prix de vente : 30 FB