Monique FRÉDÉRICKX

ULB

centre de documentation pédagogique

Suites de polygones

UREM

Unité de Recherche
sur l'Enseignement des Mathématiques

Les Cahiers du CeDoP

Mise en page : Marie-Line Haesevelde
Graphiques : Nicole Cardon
Collection : Les Cahiers du CeDoP

ISBN 2-930089-11-3

MATHÉMATIQUE

SUITES DE POLYGONES

Niveau : 6e année
(heures complémentaires de préparation à l'enseignement supérieur)

Objectifs :

- Par une étude de suites de cercles et de polygones, découverte ou renforcement de notions telles que suite convergente, série, limite, fonction trigonométrique ou exponentielle, etc.
- Coup d'œil historique sur la première vision du monde de Kepler.

Frédérickx M.

UREM

Unité de Recherche
sur L'Enseignement des Mathématiques

Professeurs
Fr. Buekenhout, M. Parker, J. Sengier

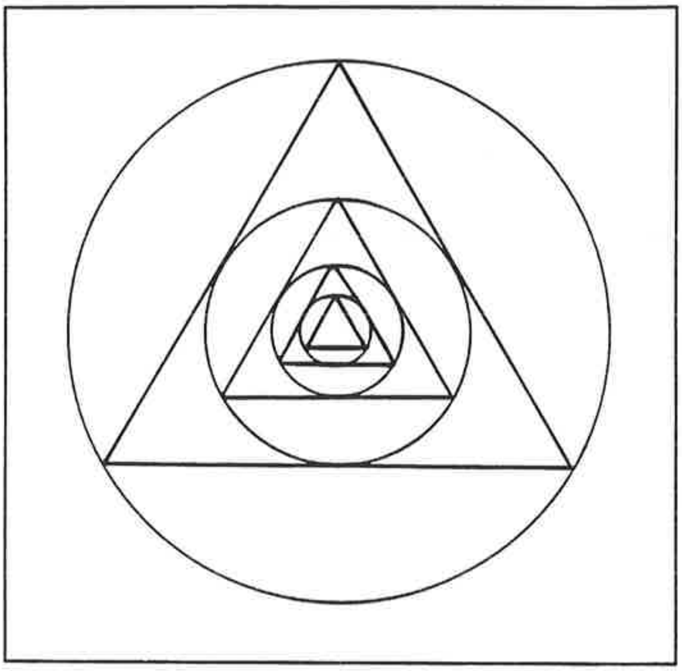
CAMPUS PLAINE C.P. 216
BD DU TRIOMPHE
B-1050 BRUXELLES
Tél. (32) (2) 650 58 71 (Secrétariat 650 58 64)
e-mail ulbmath @ ulb.ac.be
Telex Unilib B 23069
Fax (32) (2) 650 58 99

MATHÉMATIQUE

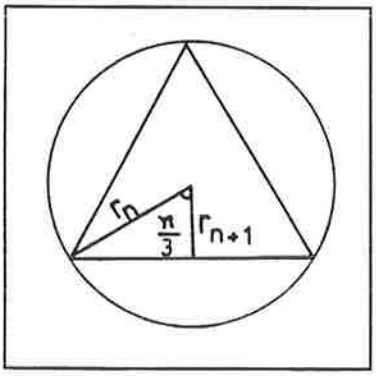
SUITES DE POLYGONES

Frédérickx M.

1. On considère la suite suivante : un cercle de rayon 1, le triangle équilatéral inscrit dans ce cercle, le cercle inscrit dans le triangle équilatéral ainsi construit, le triangle équilatéral inscrit dans ce cercle, le cercle inscrit dans ce triangle équilatéral, et ainsi de suite.



Si on considère la suite de tous les cercles ainsi construits, on a l'intuition que leur rayon diminue de plus en plus jusqu'à atteindre la valeur zéro ou encore que la suite $r_1 = 1, r_2, r_3, \dots r_n, \dots$ des rayons converge vers la valeur 0.
Qu'en est-il ?
Si r_n est le rayon du n^e cercle construit, comment calculer la valeur de r_{n+1}, le rayon du $(n+1)^e$ cercle ?



On a la relation $r_{n+1} = r_n \cdot \cos\frac{\pi}{3} = r_n \cdot \frac{1}{2}$.
La suite $r_1, r_2, r_3, \dots r_n, \dots$ est donc équivalente à

$$1, \frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \dots, \left(\frac{1}{2}\right)^n, \dots$$

Le terme général de cette suite $r_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ tend donc vers zéro quand n tend vers l'infini et notre première impression est vérifiée : **le rayon des cercles tend vers zéro.**

Et si nous faisons la somme de tous ces différents rayons ?

Comme nous sommes en présence d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$, la somme de tous les rayons des cercles construits vaut $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$ et vaut donc tout simplement le double du rayon du premier cercle de la suite.

Pourquoi ne pas considérer également la **suite des périmètres** de ces différents cercles :

$$2\pi,\ 2\pi\cdot\frac{1}{2},\ 2\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2,\ 2\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3,\ \ldots,\ 2\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n,\ \ldots,$$

qui est à nouveau une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ qui converge vers 0 et la **somme des périmètres** de tous les cercles vaut

$2\pi\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 4\pi$, qui vaut le double du périmètre du premier cercle dessiné.

En ce qui concerne la **somme des aires** de tous ces cercles

$$\pi,\ \pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2,\ \pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4,\ \ldots,\ \pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2n},\ \ldots,$$

nous sommes cette fois en présence d'une suite géométrique de $\frac{1}{4}$ qui converge toujours vers zéro. La somme de toutes ces aires vaut cette fois

$\pi\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}\cdot\pi$, qui vaut les $\frac{4}{3}$ de la surface du premier cercle considéré.

Surprenant, non ?

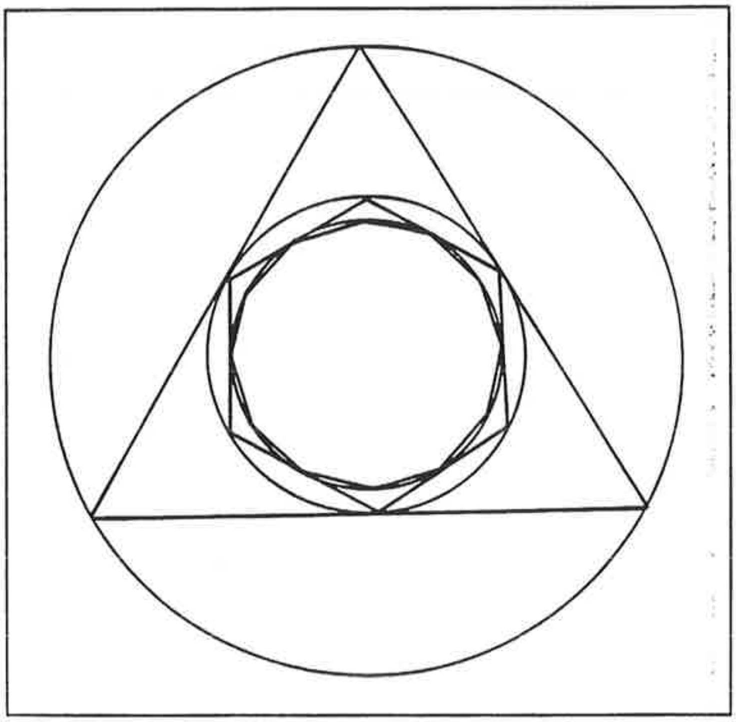
MATHÉMATIQUE

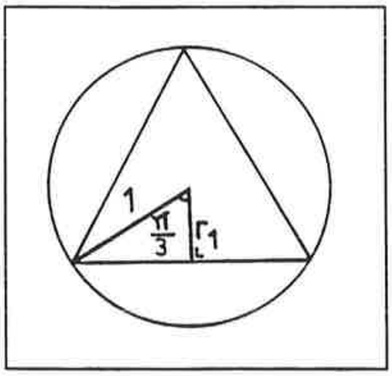
SUITES DE POLYGONES

Frédérickx M.

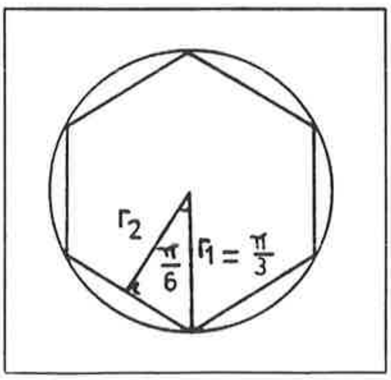
2. Si nous considérons maintenant la suite des figures suivantes : un cercle de rayon 1, un triangle équilatéral inscrit dans ce cercle, le cercle inscrit dans ce triangle, un hexagone régulier inscrit dans ce cercle, le cercle qui lui est inscrit, un dodécagone inscrit dans ce cercle, ..., nous obtenons une suite de cercles et de polygones réguliers dont le nombre de côtés double à chaque étape.

S'il est évident que le rayon des différents cercles devient de plus en plus petit, on ne peut tirer d'autres conclusions sans quelques calculs.

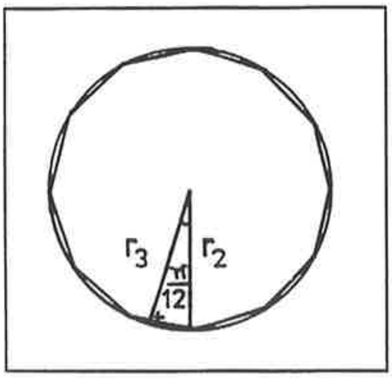




Le rayon du premier cercle a pour longueur 1.
Un triangle équilatéral est inscrit dans ce cercle.
Dans ce cas, le rayon r_1 du cercle inscrit dans ce triangle équilatéral (3 côtés) vaut
$r_1 = \cos\frac{\pi}{3}$.



r_2, le rayon du cercle suivant inscrit dans un hexagone (6 côtés) vaut
$r_2 = r_1 \cdot \cos\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} \cdot \cos\frac{\pi}{6}$.



r_3, le rayon du cercle suivant inscrit dans un dodécagone (12 côtés) vaut

$$r_3 = r_2 \cdot \cos\frac{\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{3} \cdot \cos\frac{\pi}{6} \cdot \cos\frac{\pi}{12}.$$

De manière générale, r_n, le rayon du cercle inscrit dans un polygone régulier ayant 3.2^{n-1} côtés vaut

$$r_n = r_{n-1} \cdot \cos\frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}.$$

On a donc

$$r_n = \cos\frac{\pi}{3} \cdot \cos\frac{\pi}{6} \cdot \cos\frac{\pi}{12} \cdot \ \ldots \ \cdot \cos\frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}.$$

Vers quelle valeur tend r_n quand n tend vers ∞?

Remarquons que $\sin\alpha = 2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$,

$\sin\frac{\alpha}{2} = 2 \cdot \sin\frac{\alpha}{4} \cdot \cos\frac{\alpha}{4}$

et que d'une manière générale, $\sin\frac{\alpha}{n} = 2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2n} \cdot \cos\frac{\alpha}{2n}$.

On peut donc écrire

$$\begin{aligned}
\sin\alpha &= \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot 2 \\
&= \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{4} \cdot \sin\frac{\alpha}{4} \cdot 4 \\
&= \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{4} \cdot \cos\frac{\alpha}{8} \cdot \sin\frac{\alpha}{8} \cdot 8 \\
&= \cdots \\
&= \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{4} \cdot \cos\frac{\alpha}{8} \cdot \ \ldots \ \cdot \cos\frac{\alpha}{2^n} \cdot \sin\frac{\alpha}{2^n} \cdot 2^n \text{ où } n \in \mathbb{N}_0.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{4} \cdot \cos\frac{\alpha}{8} \cdot \ \ldots \ \cdot \cos\frac{\alpha}{2^n} = \frac{\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2^n} \cdot 2^n}.$$

Frédérickx M.

Si $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, cette dernière expression devient

$$\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{12}\cdot\ \dots\ \cdot\cos\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}} = \frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{\sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3}}{2^n}\right)\cdot 2^n}$$

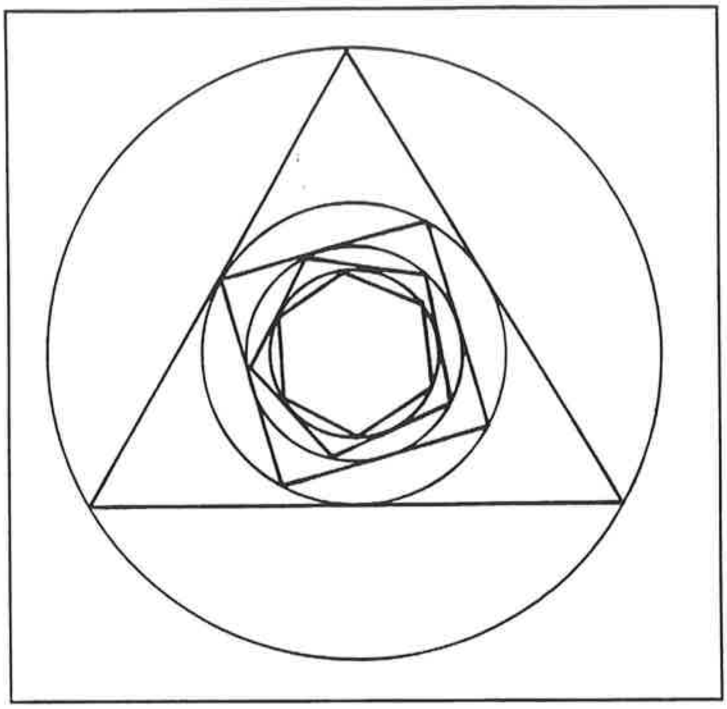
$$\text{et } r_n = \frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{\sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3}}{2^n}\right)\cdot 2^n} = \frac{\frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{\frac{2\pi}{3}}}{\frac{\sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3}}{2^n}\right)}{\frac{\frac{2\pi}{3}}{2^n}}} \qquad \mathbf{(1)}$$

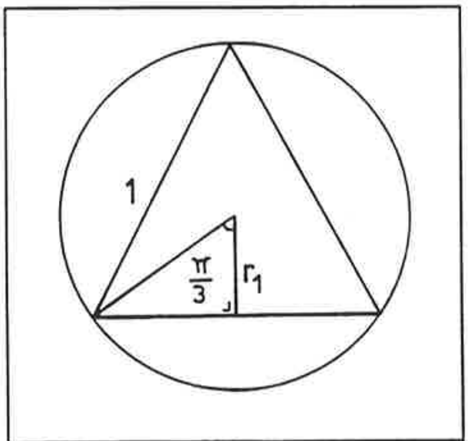
Quand n tend vers l'infini, $\frac{\frac{2\pi}{3}}{2^n}$ tend vers zéro. Si on se rappelle que $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$, on déduit de **(1)** que $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{\frac{2\pi}{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.

Le rayon des cercles de la suite considérée ne tend donc pas vers zéro mais vers la quantité $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \cong 0{,}41$.

Les cercles tendent donc vers un cercle de rayon $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$, de périmètre $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ et d'aire $\frac{27}{16\cdot\pi}$.

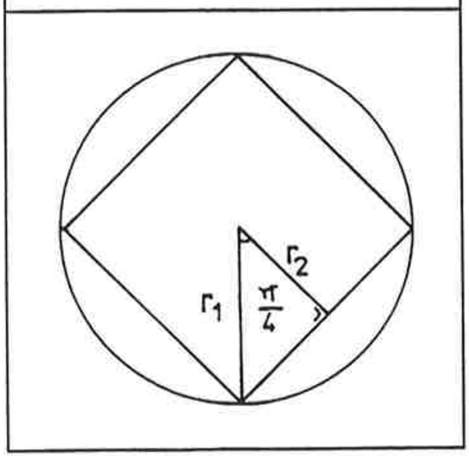
3. Si nous considérons maintenant la suite des figures suivantes : un cercle de rayon 1, un triangle équilatéral inscrit dans ce cercle, le cercle inscrit dans ce triangle, un carré inscrit dans ce cercle, le cercle qui lui est inscrit, un pentagone inscrit dans ce cercle, ..., nous obtenons une suite de cercles et de polygones réguliers dont le nombre de côtés augmente de 1 à chaque étape.





Comme le rayon du premier cercle vaut 1, le rayon r_1 du cercle inscrit dans le triangle équilatéral vaut

$$r_1 = \cos\frac{\pi}{3}$$



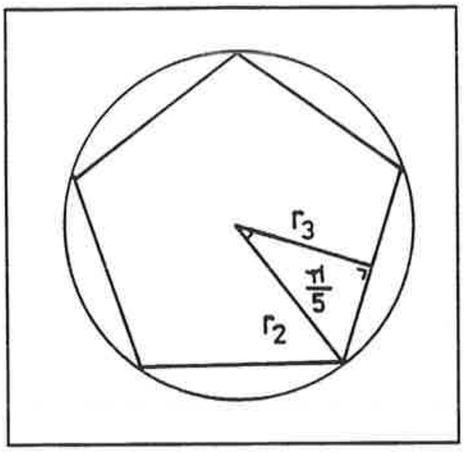
Le rayon du cercle inscrit dans le carré vaut

$$r_2 = r_1 \cdot \cos\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{3} \cdot \cos\frac{\pi}{4}$$

MATHÉMATIQUE

SUITES DE POLYGONES

Frédérickx M.



Le rayon du cercle inscrit dans le pentagone vaut

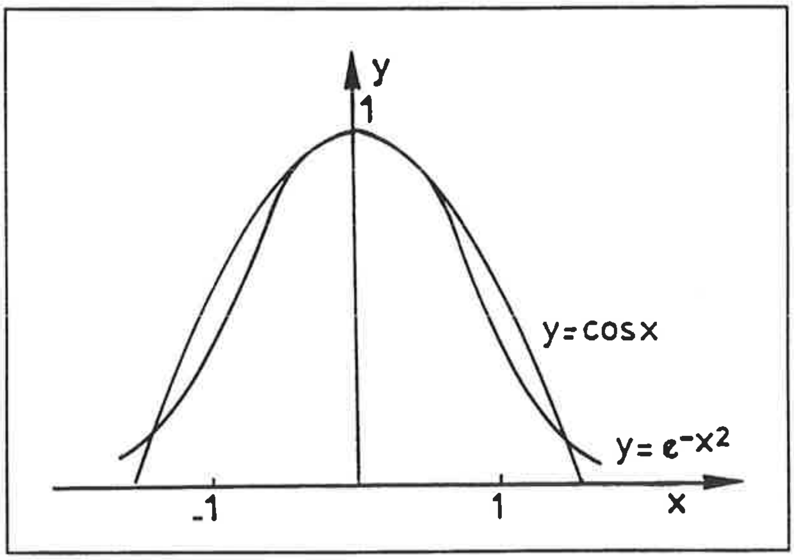
$$r_3 = r_2 \cdot \cos\frac{\pi}{5} = \cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{5}$$

Et de manière générale, le rayon r_n du cercle inscrit dans le polygone régulier à n + 2 côtés vaut :

$$r_n = \cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{\pi}{6}\cdot\ \ldots\ \cos\frac{\pi}{n+2}. \qquad (2)$$

La suite (r_n) est une suite décroissante bornée inférieurement par zéro. Cette suite converge donc, mais converge-t-elle vers zéro ou vers un nombre strictement positif ?

Pour répondre à cette question, remarquons la chose suivante :



Si $0 < |x| < 1$, $\cos x > e^{-x^2}$.

Comme $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{6}, \ldots, \frac{\pi}{n+2}$ sont des nombres < 1, on déduit de **(2)** que

$$\begin{aligned} r_n &= \cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{\pi}{6}\cdot\ \ldots\ \cdot\cos\frac{\pi}{n+2} \\ &> \frac{1}{2}\cdot e^{-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}\cdot e^{-\left(\frac{\pi}{5}\right)^2}\cdot\ \ldots\ \cdot e^{-\left(\frac{\pi}{n+2}\right)^2} \qquad (3) \\ &= \frac{1}{2}\cdot e^{-\pi^2\left(\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\ \ldots\ +\frac{1}{(n+2)^2}\right)}. \end{aligned}$$

Que peut-on dire de la suite $\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\ \dots\ +\frac{1}{(n+2)^2}$?

Comme

$$\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}<\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}=\frac{4}{4^2}=\frac{1}{2^2}$$

$$\frac{1}{8^2}+\frac{1}{9^2}+\ \dots\ +\frac{1}{15^2}<\frac{1}{8^2}+\frac{1}{8^2}+\ \dots\ +\frac{1}{8^2}=\frac{8}{8^2}=\frac{1}{2^3}$$

$$\frac{1}{16^2}+\frac{1}{17^2}+\ \dots\ +\frac{1}{31^2}<\frac{16}{16^2}=\frac{1}{2^4}$$

...

On a $\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\ \dots+\frac{1}{n^2}+\ \dots\ <\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ \dots\ =\frac{\frac{1}{2^2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

et $-\left(\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\ \dots\ +\frac{1}{n^2}\right)>-\frac{1}{2}$ **(4)**

On déduit de **(3)** et de **(4)** que $\lim_{n\to\infty} r_n \geq \frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{\pi^2}{2}} \cong 0{,}0036$.

Cette quantité, relativement « petite » est strictement positive et **les rayons des cercles étudiés ne convergent pas vers zéro.**[1]

[1]Ce qui précède est inspiré d'une émission de télévision de la BBC, *The Open University*

MATHÉMATIQUE

SUITES DE POLYGONES

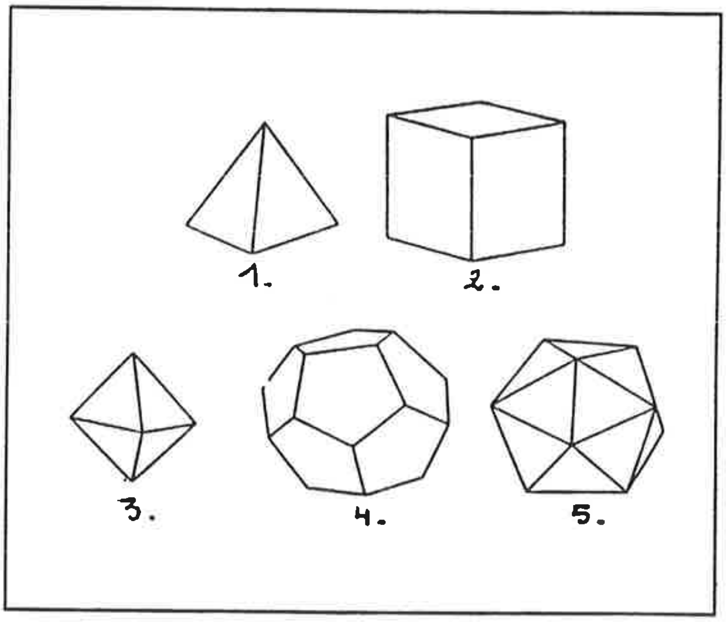
Frédérickx M.

4. La première vision du monde de Kepler (1571-1630) : une suite de polyèdres et de sphères !

Astrologue et astronome allemand, disciple de Tycho Brahé, Kepler était guidé par sa croyance que Dieu avait créé le monde suivant des lois mathématiques rationnelles et belles. En 1596, il créa un premier modèle de sa conception de l'ordre du monde : une suite de sphères et de polyèdres réguliers emboîtés. Par la suite, il abandonna cette conception du monde et ses recherches l'amenèrent à découvrir les lois bien connues qui font de lui et de Tycho Brahé les créateurs de l'astronomie moderne.

« [2](...) Le raisonnement scientifique de Kepler est fascinant. Comme Copernic, c'était un mystique et comme Copernic, il croyait que le monde était créé par Dieu selon un plan mathématique simple et beau. Cette croyance dominait toute sa pensée. Kepler était également quelque peu superstitieux et, en partie parce qu'il croyait en l'astrologie, du moins durant sa jeunesse, et en partie parce qu'il était sollicité pour faire des prédictions astrologiques pour ses protecteurs à Graz et à Prague, il consacra beaucoup de temps à ce genre d'activités. (...)

(...) Kepler débuta ses travaux en astronomie par la recherche d'un principe mathématique élégant que, croyait-il, Dieu devait avoir utilisé pour créer l'univers. Les Grecs avaient déjà découvert qu'il n'existe que cinq polyèdres réguliers.



1. le tétraèdre
2. le cube
3. l'octaèdre
4. le dodécaèdre
5. l'icosaèdre

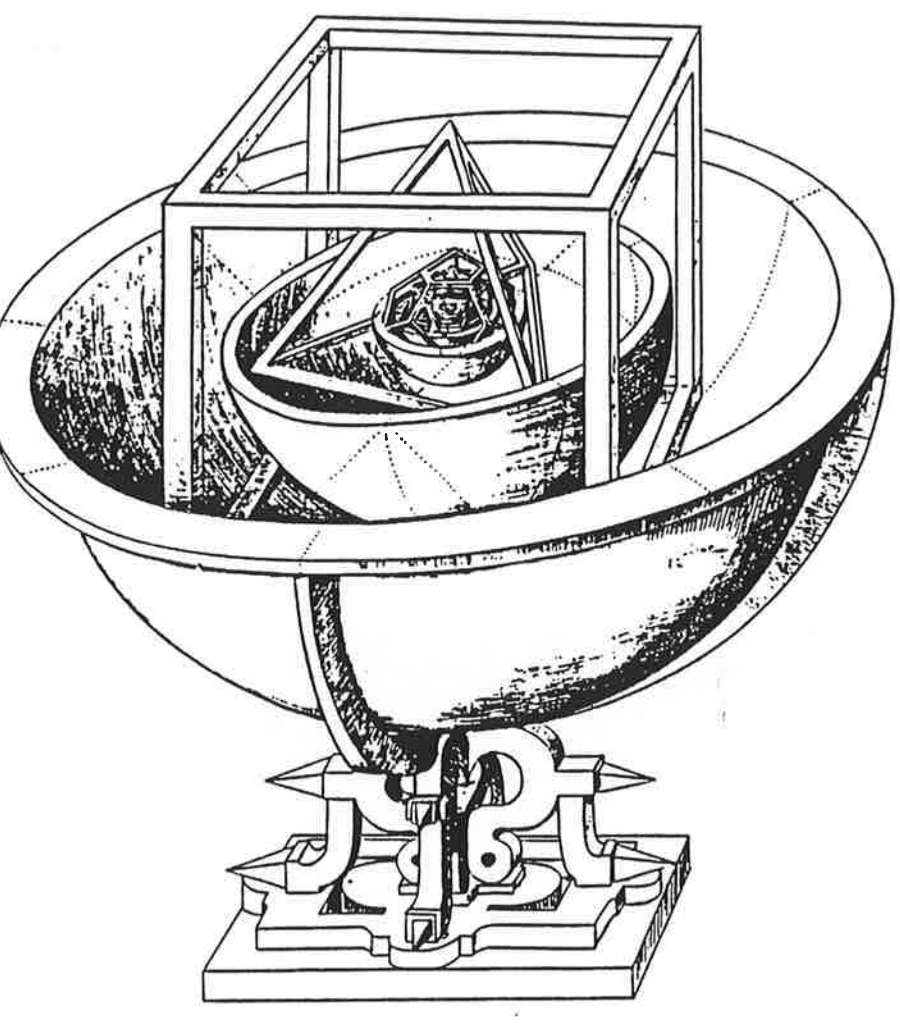
Selon Kepler, qu'un tel fait impressionnait, il semblait inévitable que Dieu avait utilisé ces figures pour créer le monde et par conséquent, il dit dans la préface de son *Mystère du Cosmos* (1596) :

« *J'entreprends de prouver que Dieu, en créant le monde et en réglant l'ordre cosmique, avait en vue les cinq solides réguliers de la géométrie connus depuis l'époque de Pythagore et de Platon et qu'il avait fixé, en accord avec les dimensions de ces solides, le nombre de sphères célestes, leurs proportions et les relations entre leurs mouvements.* »

Mais comment Dieu utilisa-t-il ces cinq solides réguliers ? Après une longue réflexion, Kepler découvrit ce qu'il croyait être le plan de Dieu. Il avait déjà acquis la conviction que le soleil devait être le centre du système solaire. De là, il supposa que Saturne, la plus éloignée des planètes connues à son époque, se déplaçait sur une sphère dont le centre était le soleil. Il supposa ensuite qu'un cube était inscrit dans cette sphère. Dans ce cube, il imagina une autre sphère qui y était inscrite et sur laquelle Jupiter était sensée se déplacer. À son tour, la

PLANCHE III

MONTRANT LES DIMENSIONS ET LES DISTANCES DES ORBES DES PLANETES AU MOYEN DES CINQ CORPS RÉGULIERS DE LA GÉOMÉTRIE DÉDIÉE A L'ILLUSTRISSIME PRINCE ET SEIGNEUR, LE SEIGNEUR FRÉDÉRIC DUC DE WURTEMBERG ET DE TECK, COMTE DE MUMPELGART ETC [1]



sphère de Jupiter était circonscrite à un tétraèdre, polyèdre régulier dans lequel était inscrite une troisième sphère sur laquelle se déplaçait Mars. En utilisant les cinq polyèdres, il y avait place pour six sphères et six était le nombre de planètes connues à ce jour. La correspondance entre le nombre de sphères

MATHÉMATIQUE

SUITES DE POLYGONES

Frédérickx M.

autorisées par ce système et le nombre de planètes paraissait être un argument écrasant pour Kepler.

Une fois fixé le rayon de la sphère la plus éloignée, les autres rayons sont déterminés par le fait que les polyèdres et les sphères sont successivement inscrits les uns dans les autres. Kepler espérait que, le rayon de la plus grande sphère étant choisi égal au rayon de la planète la plus éloignée, les rayons des cinq autres sphères donneraient automatiquement les distances du Soleil aux cinq autres planètes. Toutefois, ce n'était pas le cas ; de plus, aucun déplacement simple sur une sphère ne correspondait à la trajectoire d'une planète. Aussi, pendant plusieurs années, Kepler chercha-t-il à modifier son modèle initial pour le faire correspondre aux observations. Ce ne fut que lorsqu'il connut les observations de Brahé qu'il se persuada que son modèle ne fonctionnerait pas. Il montra alors son respect des faits : bien que nettement épris de sa théorie mathématique, il accepta de la sacrifier ... ».

Portrait de Kepler

[2]Traduction de deux extraits du livre *Mathematics. A Cultural Approach*, Morris Kline, Addison-Wesley, Londres, 1962. Chapitre 12 : *The revolution in astronomy. The work of Kepler*

Université libre de Bruxelles
Centre de Documentation Pédagogique - CeDoP
CP 186 - avenue F.D. Roosevelt, 50 - 1050 Bruxelles
✆ 02/650 40 35

Dépôt légal D/1995/6890/11
Prix de vente : 40 FB

1 €