Monique FRÉDÉRICKX

ULB

centre de documentation pédagogique

Lieux géométriques faciles… mais déroutants

UREM

Unité de Recherche
sur l'Enseignement des Mathématiques

Les Cahiers du CeDoP

Mise en page : Marie-Line Haesevelde
Dessins : Nicole Cardon

Collection : Les Cahiers du CeDoP

ISBN 2-930089-47-4

Niveau : 4e - 5e - 6e année

Objectif : développement de la réflexion au moyen d'exercices ne comportant aucun calcul fastidieux.

MATHÉMATIQUE

LIEUX GÉOMÉTRIQUES FACILES... MAIS DÉROUTANTS

Frédérickx Monique

Cette étude a été réalisée dans le cadre d'un accord de coopération entre l'UREM et le CREM a.s.b.l. (Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques), avec le soutien de la Direction générale de l'Enseignement supérieur et de la Recherche scientifique, Ministère de l'Éducation, de la Recherche et de la Formation.

UREM

Unité de Recherche
sur L'Enseignement des Mathématiques

Professeurs
Fr. Buekenhout, M. Parker, J. Sengier

CAMPUS PLAINE C.P. 216
BD DU TRIOMPHE
B-1050 BRUXELLES

Tél. (32) (2) 650 58 71 (Secrétariat 650 58 64)
e-mail ulbmath @ ulb.ac.be
Telex Unilib B 23069
Fax (32) (2) 650 58 99

Introduction

Pourquoi ce dossier qui a pour thème les lieux géométriques alors que ce sujet est traité abondamment dans d'excellents livres ? Tout simplement parce que j'ai été particulièrement séduite par un article du professeur Francis Buekenhout qui a paru dans une revue de Mathématique et Pédagogie [1]. Ce dossier est fortement inspiré de cet article. Il comporte les énoncés et les solutions de quelques exercices qui ont la particularité d'être parfois déroutants, inhabituels et qui ne nécessitent aucun calcul. Ils constituent un excellent hors d'œuvre aux lieux géométriques « classiques » et ont été le point de départ de discussions passionnées et passionnantes en classe et ce, indépendamment du niveau de celle-ci en mathématique.

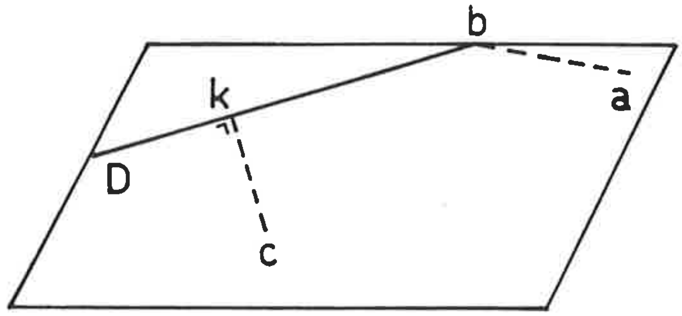
Exercice 1

Déterminez l'ensemble des points situés à une distance d donnée ($d \in \mathbb{R}_0^+$) d'une droite D

1. dans le plan,
2. dans l'espace,
3. dans un parallélogramme.

Solution

1. La réunion des deux parallèles à la droite D situées à la distance d de D.
2. Le cylindre droit qui a pour axe la droite D et pour rayon la distance d.
3. Cette question peut surprendre dans un parallélogramme...



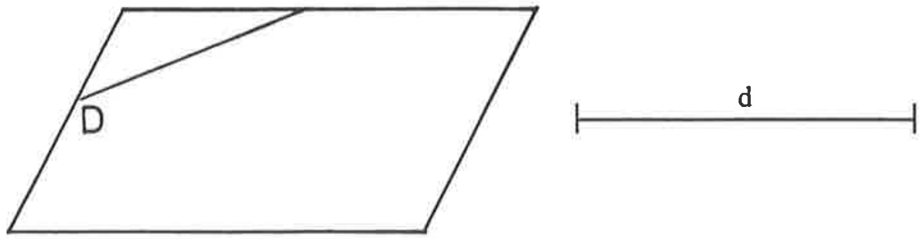
Dans ce cas, on appelle **droites, les segments fermés dont les extrémités appartiennent au parallélogramme**. La distance d'un point p à une droite D est la mesure du plus court chemin de ce point à la droite. La distance de c à D est la distance de c à k. La distance de a à D est la distance de a à b.

La réponse à cette question dépend donc du parallélogramme choisi, de la position de la droite D dans celui-ci et de la distance d choisie.

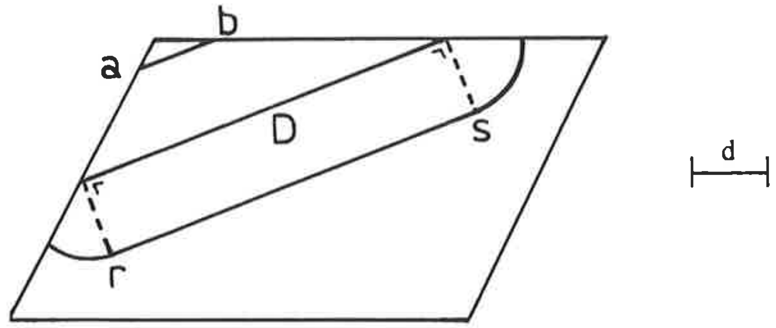
[1] Fr. Buekenhout, *Lieux géométriques. Pourquoi ? Comment ?*, Bulletin de la Société Belge des Professeurs de Mathématiques, Mathématique et Pédagogie, n°53, septembre-octobre 1985, pp. 55-64.

Exemples

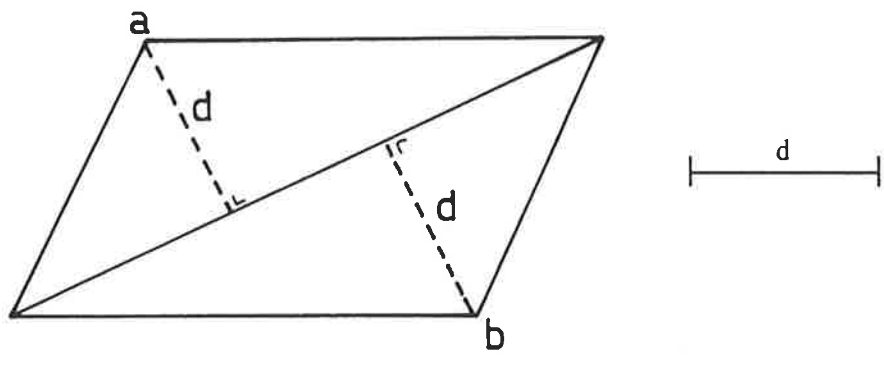
1. Aucun point ne répond à la question.



2. La solution est la réunion d'une droite ab, d'un segment de droite $[r,s]$ et de deux arcs de cercle.



3. La solution est la paire de points $\{a, b\}$.



Etc.

Précisons que ce que l'on entend par distance d'un point p à une partie A de E^2 ou de E^3 est le minimum des distances de ce point à tout point de A.

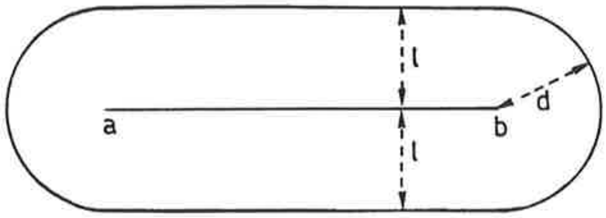
Exercice 2

Déterminez l'ensemble des points situés à une distance d donnée $(d \in \mathbb{R}_0^+)$ d'un segment $[a,b]$

1. dans le plan,
2. dans l'espace,
3. dans un parallélogramme.

Solution

Dans E^2 : Réunion de deux segments de droite parallèles à $[a,b]$ et de deux demi-cercles centrés respectivement en a et en b et de rayon d.

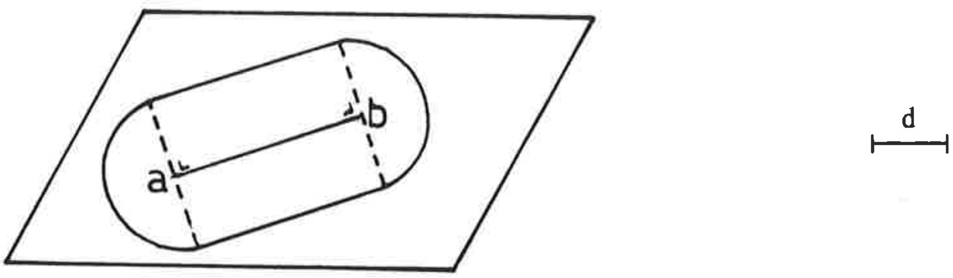


Dans E^3 : Réunion d'un cylindre (borné, cette fois) d'axe $[a,b]$ et de rayon d et de deux demi-sphères centrées respectivement en a et en b et de rayon d. La solution est en fait la surface de révolution obtenue par la rotation autour de $[a,b]$ de la solution de E^2.

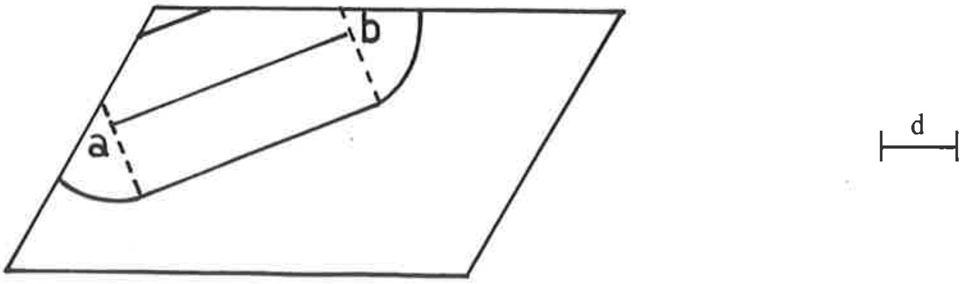
Dans un parallélogramme : Comme pour la solution 3 de l'exercice 1, la réponse dépend du parallélogramme choisi, de la position du segment $[a,b]$ et de la distance d.

Exemples

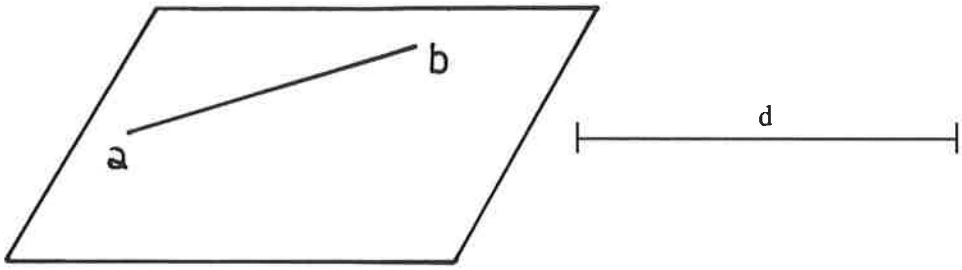
1. La solution peut être identique à celle du même problème étudié dans le plan.



2. La solution peut être une partie de la solution dans E^2.



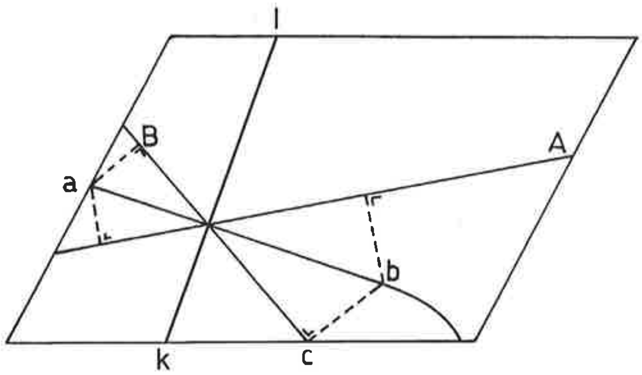
3. La solution peut être vide.



Exercice 3

Déterminez l'ensemble des points d'un parallélogramme équidistants de deux droites sécantes A et B.

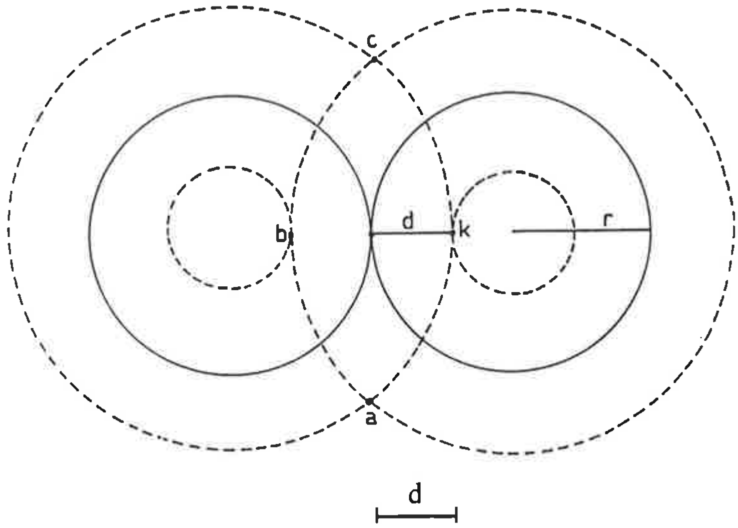
Exemple de solution



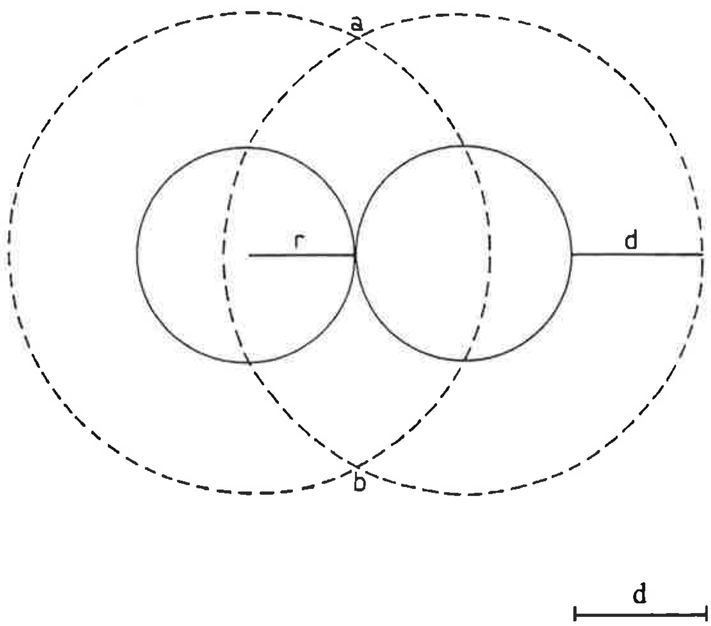
La solution, dans le cas de la figure ci-dessus, est formée de la droite *kl*, de la demi-droite *a,b*] et d'un arc de parabole de foyer *c* et de directrice A. En effet, en dehors de la demi-droite *a,b*], le problème revient à chercher l'ensemble des points équidistants d'un point (c) et d'une droite (A).

Solution 4.2.

Si $d \leq r$, sont solutions deux points (b et k) ainsi que les points du cercle passant par a et c, cercle obtenu par rotation du point a autour de l'axe bk.



Si $d > r$, sont solutions les points du cercle passant par a et b, cercle obtenu par rotation du point a autour de l'axe reliant les centres des sphères.



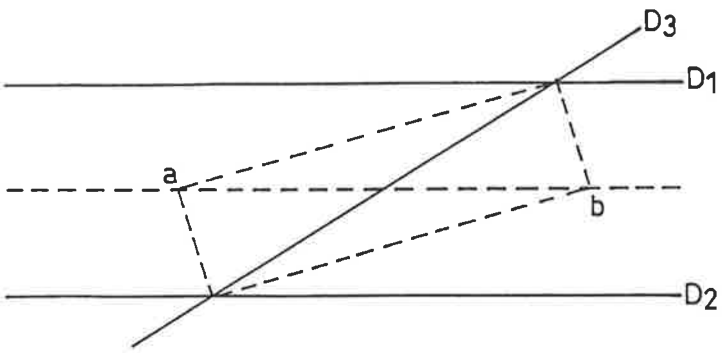
Exercice 5

Si D_1 et D_2 sont deux droites parallèles coupées par une droite D_3, quel est l'ensemble des points équidistants des trois droites

1. dans E^2,
2. dans E^3 ?

Solution dans E^2

Sont solutions les deux points *a* et *b*, intersection de la parallèle à D_1 et D_2, équidistante de ces deux droites, et des bissectrices des angles (D_1, D_3) et (D_2, D_3).

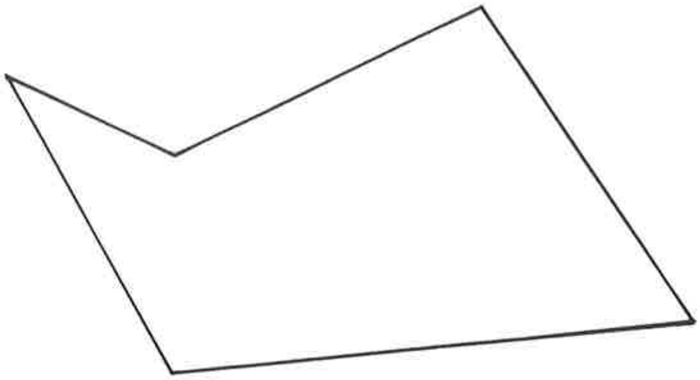


Solution dans E^3

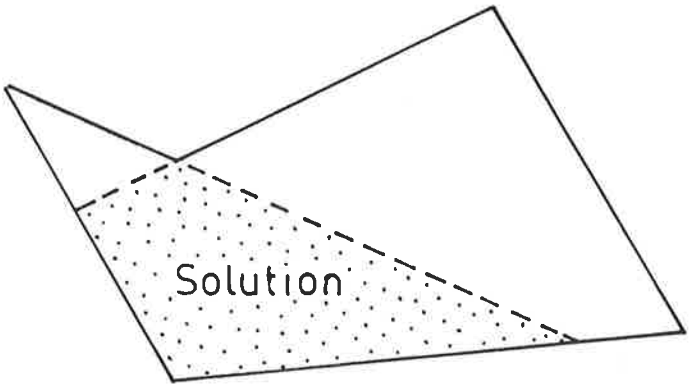
Sont solutions les points des droites perpendiculaires au plan (D_1, D_2), passant par *a* et *b*.

Exercice 6

Si F est une figure du plan, on appelle mirador de F, un point m tel que pour tout $f \in \mathrm{F}$, $[m, f] \subset \mathrm{F}$. Trouvez l'ensemble des miradors de la figure qui suit.



Solution



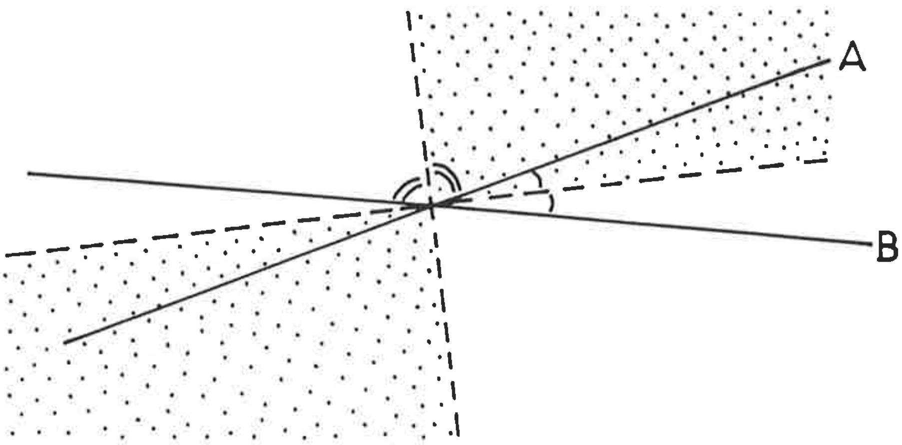
Exercice 7

On donne deux droites sécantes A et B du plan. Déterminez l'ensemble des points dont la distance à A est inférieure à la distance à B

1. dans E^2,
2. dans E^3.

Solution dans E^2

Il existe une infinité de points qui répondent à la question. Ces points se situent dans les régions du plan qui contiennent la droite A et qui sont comprises entre les deux bissectrices des droites A et B.



Solution dans E^3

Sont solutions, tous les points situés sur les droites qui sont perpendiculaires au plan (A, B) et qui passent par un point solution du même problème dans E^2.

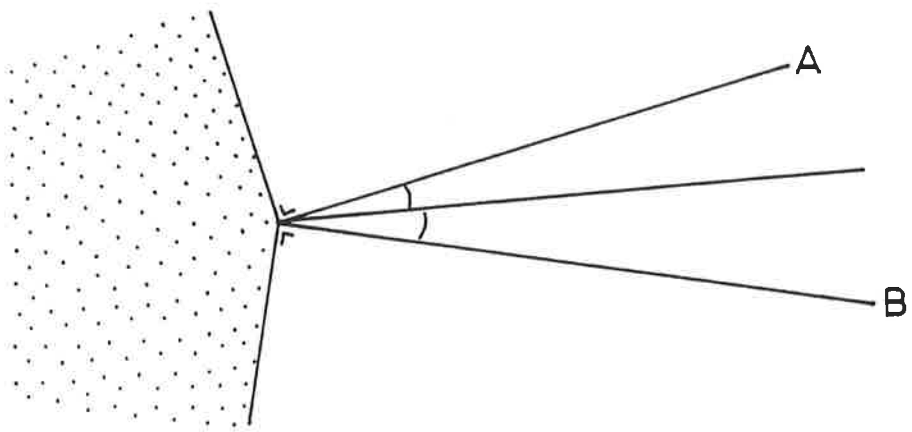
Exercice 8

Déterminez l'ensemble des points équidistants de deux demi-droites de même origine

1. dans E^2,
2. dans E^3.

Solution dans E^2

Il existe une infinité de points qui répondent à la question. Ces points se situent sur la bissectrice des deux demi-droites ou dans la région du plan qui ne contient pas les demi-droites A et B et qui est limitée par les perpendiculaires à A et à B élevées en leur point commun.



Solution dans E^3

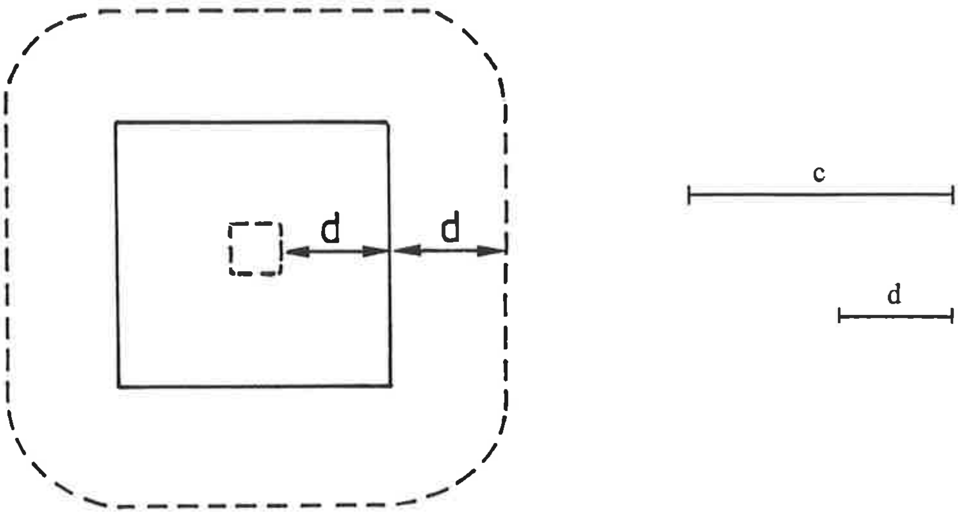
Il existe une infinité de points qui répondent à la question. Ces points se situent sur le plan bissecteur des deux demi-droites ou dans la région de l'espace qui ne contient pas les demi-droites A et B et qui est limitée par les plans perpendiculaires à A et à B en leur point commun.

Exercice 9

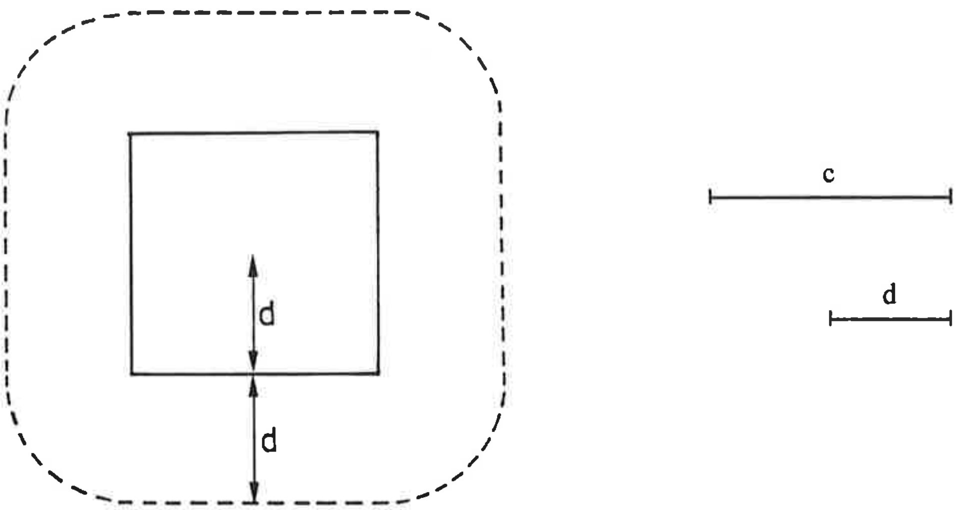
Déterminez l'ensemble des points du plan situés à une distance d donnée d'un carré de côté c. $(c, d \in \mathbb{R}_0^+)$

Solution

Si $d < \frac{c}{2}$, les points solutions sont situés sur un carré ou sur une figure constituée de 4 segments de droite et de 4 quarts de cercle.



Si $d = \frac{c}{2}$, la solution comprend le centre du carré et les points d'une figure constituée de 4 segments de droite et de 4 quarts de cercle.



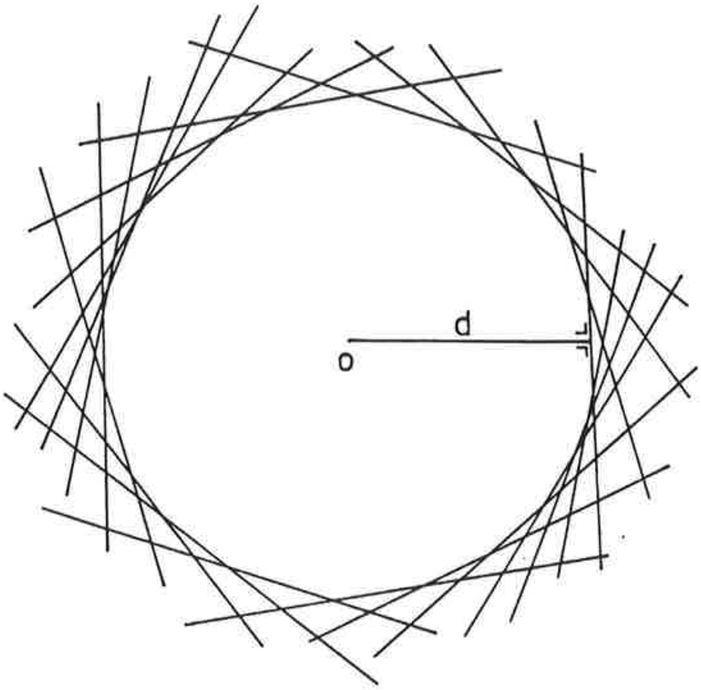
Exercice 10

Déterminez l'ensemble des droites situées à une distance *d* donnée ($d \in \mathbb{R}_0^+$) d'un point *o*

1. dans E^2,
2. dans E^3.

Solution dans E^2

Toutes les droites tangentes au cercle de centre *o* et de rayon *d*.



Solution dans E^3

Toutes les droites tangentes à la sphère de centre *o* et de rayon *d*.

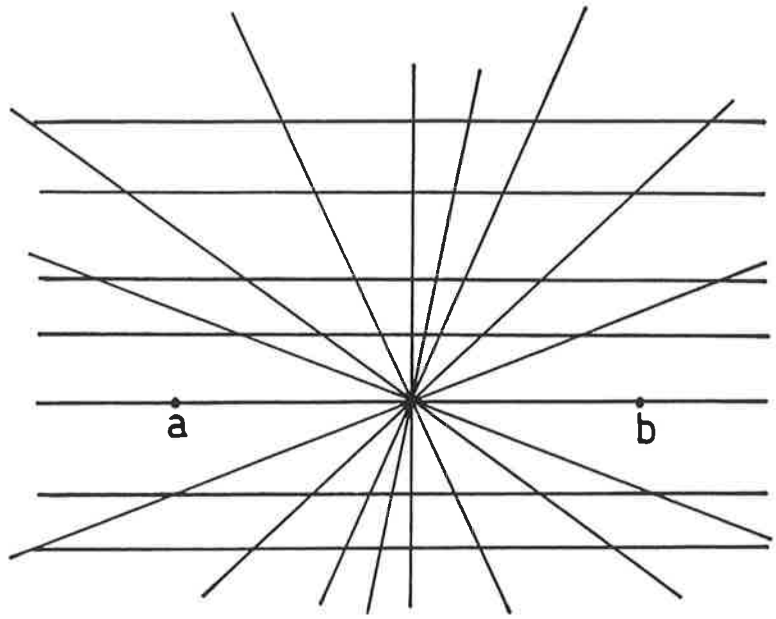
Exercice 11

Déterminez l'ensemble des droites équidistantes de deux points *a* et *b*

1. dans E^2,
2. dans E^3.

Solution dans E^2

La médiatrice du segment [*a*,*b*] répond bien sûr à la question mais aussi toutes les autres droites passant par le milieu de ce segment. Toutes les droites parallèles à la droite *ab* sont également solutions.



Solution dans E^3

Sont solutions l'ensemble des droites passant par le milieu du segment [*a*,*b*] ainsi que toutes les droites parallèles à la droite *ab*.

Exercice 12

Un ours part d'un point p sur la terre. Il parcourt 1 km vers le nord, 1 km vers l'est et ensuite 1 km vers le sud. Il se retrouve en p. Quel est la couleur de l'ours ?

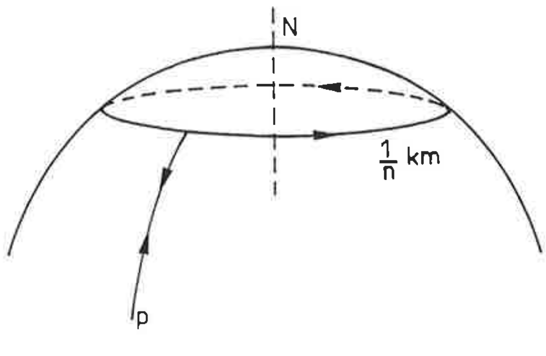
D'après Polya

De prime abord, l'énoncé paraît, pour le moins, saugrenu. Une relecture de l'énoncé permet de comprendre qu'on demande quels sont les points de la terre pour lesquels un tel déplacement ramène au point de départ.

Solution

D'une manière générale, l'ours qui effectue un tel parcours sur la sphère terrestre ira vers le nord et vers le sud sur des méridiens différents et ne se retrouve pas à son point de départ.

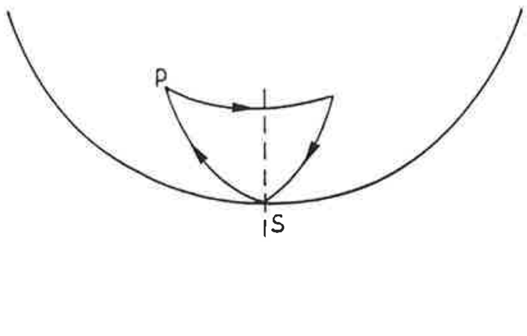
Il y a pourtant une infinité de solutions. En effet, si l'ours se trouve dans l'hémisphère Nord à un endroit situé à 1 km au sud d'un parallèle qui a une longueur de $\frac{1}{n}$ km ($n \in N_0$) et qu'il parcourt le trajet proposé, il se retrouvera après sa promenade à l'endroit d'où il est parti.



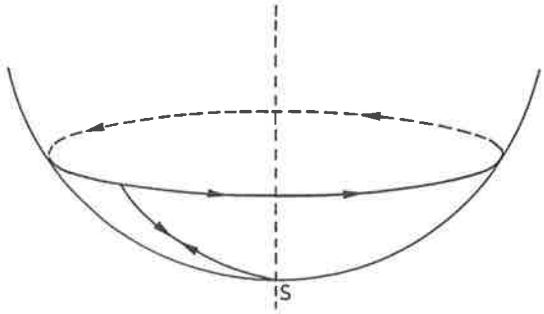
Remarquons que l'ours fera n fois le tour de ce parallèle.

Les points situés à 1 km du Pôle Nord sont-ils solutions du problème ? Le cas est litigieux car que signifie « aller vers l'est » lorsqu'on est au Pôle Nord ?

On peut faire un raisonnement analogue en partant du Pôle Sud : on peut partir du Pôle Sud, se déplacer de 1 km vers le nord, effectuer 1 km vers l'est le long du parallèle atteint et descendre ensuite 1 km vers le sud. Le Pôle Sud est donc également un point solution au problème posé.

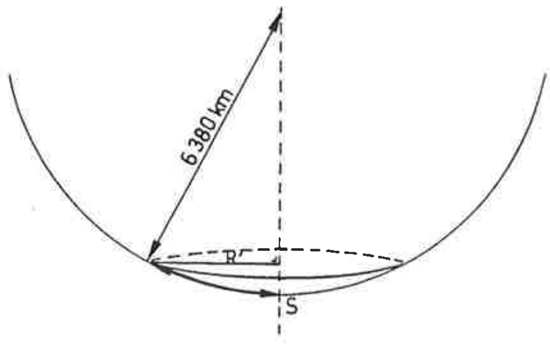


Peut-on partir du Pôle Sud, effectuer 1 km vers le nord, parcourir n tours de $\frac{1}{n}$ km ($n \in \mathbb{N}_0$) le long du parallèle atteint et revenir ensuite vers le Pôle Sud ?



Ce n'est pas possible car le parallèle situé à 1 km du Pôle Sud a une longueur supérieure à 1 km. En effet, si on considère que le rayon terrestre a une longueur de 6380 km, le parallèle situé à une distance de 1 km du Pôle Sud, mesure

$$2\pi\ R' = 2\pi \cdot 6380 \cdot \sin\left(\frac{1}{6380}\right)$$
$$\cong 6 \text{ km}$$



Et notre ours ? Comme il n'y a pas d'ours au Pôle Sud, il ne peut vivre que près du Pôle Nord ; c'est donc un ours blanc.

Université libre de Bruxelles
Centre de Documentation Pédagogique - CeDoP
CP 186 - avenue F.D. Roosevelt, 50 - 1050 Bruxelles
✆ 02/650 40 35

Dépôt légal D/1997/6890/9
Prix de vente : 60 FB