PROBLEMATHS
31 mars 2015

Voici les solutions des 4 derniers Problemaths, ainsi que le palmarès final de cette année.

Solution du Problemath 10. (Posé aux Olympiades canadiennes de mathématiques en 1980.) Tout octaèdre régulier O a la propriété cherchée. En effet, toute section de O par un plan π parallèle à deux faces opposées F et F', et ayant une intersection non vide avec l'intérieur de O, est un hexagone H dont 3 côtés sont parallèles aux 3 côtés de F, les 3 autres côtés de H étant parallèles aux 3 côtés de F'. De ce fait, si on développe l'octaèdre O sur un plan de telle façon que la réunion des 6 faces coupées par π soit un parallélogramme P, la réunion des 6 côtés de H sera un segment parallèle au plus long côté de P, donc le périmètre de H sera égal à la longueur de ce côté de P, c'est-à-dire au périmètre de F.

Nous ignorons s'il existe d'autres polyèdres convexes ayant cette propriété.

Ont fourni une solution correcte : D. GALANT (élève de 5ème à l'Athénée de La Louvière), F. THILMANY (prépa. doctorat Univ. San Diego), Y. SUPRIN (prof de maths), W. DE DONDER (ingénieur) et DARK VADOR.

Solution du Problemath 11. Une stratégie possible consiste à ouvrir successivement deux portes, à garder la somme d'argent derrière la deuxième porte choisie si cette somme est supérieure à celle se trouvant derrière la 1ère porte, et à opter pour la 3ème porte dans le cas contraire. La probabilité d'emporter la somme d'argent la plus élevée en suivant cette stratégie vaut $\frac{1}{2}$. En effet, il y a $3! = 6$ possibilités (toutes équiprobables) pour la disposition des 3 sommes derrière les 3 portes. Comme 3 de ces 6 possibilités mènent à la somme la plus élevée, on a bien une chance sur 2 de l'emporter.

Il est impossible de faire mieux. En effet, même si on fermait la porte derrière laquelle se trouve la somme d'argent la plus petite (une situation a priori plus favorable que celle décrite dans ce problème), la probabilité d'emporter la somme d'argent la plus élevée vaudrait encore $\frac{1}{2}$, quoi qu'on décide de faire.

Ont fourni une solution correcte : A. JORISSEN (élève de 4ème latin-maths), D. GALANT (élève de 5ème à l'Athénée de La Louvière), M. DELHELLE (élève de 6ème au Collège St Quirin de Huy), E. GRUWÉ (BA2 polytech), F. THILMANY (prépa. doctorat Univ. San Diego), F. DOIGNIE, A. GRUWÉ (ingénieurs), A. GREEN, Y. SUPRIN (profs de maths), P. MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe), DARK VADOR.

Solution du Problemath 12. La seule solution de l'équation donnée $(*)$ est celle où tous les entiers x_i sont nuls. En effet, le second membre de $(*)$ étant pair, ainsi que tous les termes du premier membre à partir du deuxième, on en déduit que x_1 est pair. Si on pose $x_1 = 2y_1$ avec $y_1 \in \mathbb{Z}$, l'équation s'écrit

$$x_2^{2015} + 2x_3^{2015} + 2^2x_4^{2015} + \ldots + 2^{2013}x_{2015}^{2015} + 2^{2014}y_1^{2015} = 2014\, x_2x_3 \ldots x_{2015}y_1$$

qui est analogue à $(*)$, mais avec comme inconnues x_2, x_3, x_4, $\ldots, x_{2015}, y_1$ au lieu de x_1, x_2, x_3, $x_4, \ldots, x_{2015}$. Il en résulte que si $(x_1, x_2, \ldots, x_{2015})$ est solution de $(*)$, alors $(x_2, x_3, \ldots, x_{2015}, \frac{x_1}{2})$ est aussi solution, donc aussi $(x_3, x_4, \ldots, x_{2015}, \frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2})$ et, en itérant ce processus, que $(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2}, \ldots, \frac{x_{2015}}{2})$ est solution. Par conséquent, tous les entiers dans une solution de $(*)$ sont nécessairement pairs.

De ce fait, si les x_i n'étaient pas tous nuls, en répétant le raisonnement ci-dessus un nombre suffisant de fois, on obtiendrait une solution contenant au moins un x_i impair, d'où la contradiction avec ce qu'on a prouvé ci-dessus.

Ont fourni une solution correcte : D. GALANT (élève de 5ème à l'Athénée de La Louvière), M. DELHELLE (élève de 6ème au Collège St Quirin de Huy), F. THILMANY (prépa. doctorat Univ. San Diego), A. GREEN, Y. SUPRIN (profs de maths) et DARK VADOR.

Solution du Problemath 13. On va prouver que les points p_i ($i \in \mathbb{Z}$) de coordonnées $(i, i^3 - 2015\, i^2)$ ont la propriété demandée. Rappelons que trois points (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) de $\mathbb{R}^2$ sont alignés si et seulement si le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Or,

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a & a^3 - 2015\, a^2 & 1 \\ b & b^3 - 2015\, b^2 & 1 \\ c & c^3 - 2015\, c^2 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & a^3 & 1 \\ b & b^3 & 1 \\ c & c^3 & 1 \end{vmatrix} - 2015 \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c) - 2015(a-b)(b-c)(c-a) \\ &= (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c-2015)\end{aligned}$$

Donc, si a, b, c sont distincts, le déterminant ci-dessus sera nul (autrement dit, p_a, p_b, p_c seront alignés) si et seulement si $a + b + c = 2015$.

A fourni une solution correcte : (non élémentaire, car faisant intervenir les propriétés du groupe additif de l'ensemble des points d'une courbe elliptique !) DARK VADOR.

Pour terminer en beauté, voici le palmarès final de tous ceux qui ont résolu au moins deux Problemaths en 2014–2015. Tous ces Problematheurs et Problematheuses sont cordialement invités à un drink, suivi de la remise solennelle des diplômes et des prix, qui aura lieu le **mercredi 6 mai à 12h30** dans le local 2.O8.109 (8ème étage du bâtiment NO, Campus de la Plaine de l'ULB, Boulevard du Triomphe à Bruxelles).

— A résolu 13 Problemaths : DARK VADOR.
— Ont résolu 12 Problemaths : D. GALANT (élève de 5ème à l'Athénée de La Louvière), F. THILMANY (prépa. doctorat Univ. San Diego).
— Ont résolu 9 Problemaths : A. VANDENSCHRICK (BA3 maths), A. GREEN, Y. SUPRIN (profs de maths).
— Ont résolu 8 Problemaths : C. DE GROOTE (prépa. doctorat Univ. Stanford), A. GRUWÉ (ingénieur).
— Ont résolu 7 Problemaths : M. DELHELLE (élève de 6ème au Collège St Quirin de Huy), E. GRUWÉ (BA2 polytech), W. DE DONDER (ingénieur).
— Ont résolu 6 Problemaths : A. JORISSEN (élève de 4ème latin-maths), P. BUSTILLO VAZQUEZ (élève de 6ème à l'Athénée Catteau), O. DECKERS (prof de maths).
— Ont résolu 5 Problemaths : C. BODART (élève de 6ème au Collège Ste Gertrude à Nivelles), S. MASSON (prof de maths), P. BARBIER (software engineer à Seattle).
— Ont résolu 4 Problemaths : M. MOGHADDAMFAR (BA2 polytech), P. MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe) et LADY BELMATH.
— Ont résolu 3 Problemaths : V. COUPLET (élève de 6ème à l'Institut Bailly à Braine l'Alleud), C. SIMON (élève de 5ème au Lycée Emile Jacqmain), F. DOIGNIE (ingénieur).
— Ont résolu 2 Problemaths : G. BALINT (BA2 maths), R. HANNAERT (BA2 polytech), P. GILLET (BA2 régendat en maths), N. ROOBAERT (BA3 maths), L. GOSSELIN (BA2 polytech).