

**Sociétés humaines
et Théorème de Bruss-Duerinckx**

Quoi que l'avenir réserve à l'humanité, certaines choses ne changeront probablement jamais: la nécessité de nourriture et de ressources en suffisance, un désir de sécurité et de confort, et en particulier un futur souriant pour les générations à venir.

Si nous admettons ceci, pouvons-nous prédire dans quelles directions les sociétés vont évoluer? En particulier, pourrions-nous voir apparaître des formes de société qui sont plus extrêmes encore que tout ce que l'humanité a jamais connu?

De façon remarquable, il se trouve qu'aucune forme de société ne peut être plus extrême que celles que l'humanité a déjà connues dans le passé: les limites, de ce point de vue-là, ont déjà été testées. Ce résultat, récemment prouvé à l'ULB par Bruss et Duerinckx (2014), est le résultat dominant d'une série de découvertes dans un projet de recherche à long terme.

C'est en 1982 que Bruss, alors à l'Université de Namur, a débuté cette réflexion approfondie sur les sociétés humaines, motivé par d'innombrables discussions dans les médias sur les avantages et les inconvénients des différents systèmes politiques. Dans ces discussions, un problème majeur venait toujours du fait que les hypothèses étaient indissociables d'interprétations et de jugements purement personnels, de sorte qu'aucune vraie conclusion, substantielle et impartiale, ne pouvait être obtenue.

Serait-il toutefois possible dans ces questions d'affirmer quelque chose d'absolu, qui puisse être démontré dans un véritable sens mathématique, en se confinant à des hypothèses générales admises par tous? Les deux hypothèses naturelles suivantes ont été retenues:

Hypothèse (H1): Les individus veulent survivre et voir survivre leurs descendants.

Hypothèse (H2): Les individus préfèrent en général un meilleur niveau de vie.

Si les deux entrent en conflit, nous supposons que (H1) a la priorité sur (H2). Étant donné ces hypothèses, le problème est de trouver à présent un modèle de société humaine, donc tenant compte des naissances et des décès, de la production, de la consommation et de l'héritage de ressources, de la politique réglementant la distribution des ressources, et des interactions entre les individus et la société. Après de multiples tentatives, Bruss a proposé comme modèle un nouveau type de processus de branchement dépendant des ressources, baptisé *RDBP*. Dans ce modèle, l'interaction entre les individus et la société est déterminée par l'émigration: les individus quittent la société si leur demande minimale de ressource n'est pas satisfaite.

Des RDBPs vraiment réalistes pour modéliser le développement d'une société humaine sont forcément très compliqués, de sorte que les résultats étaient modestes dans un premier temps. L'idée est alors venue de réinterpréter le développement de la société comme une suite de problèmes de contrôle menant, chaque fois, à un nouvel RDBP instantané. La question que se pose la société est alors la suivante: si la situation reste la même, la survie est-elle possible? Et si c'est le cas, le niveau de vie offert sera-t-il satisfaisant? Sinon, la société devra se corriger, que ce soit par une modification de la politique de distribution des ressources, ou par un encouragement à accroître le nombre moyen d'enfants, à diminuer la consommation, à augmenter la productivité, etc. Chacune de ces corrections de la société mène à un *nouveau* RDBP. Ainsi, comprendre le développement d'une société revient, en ces termes, à comprendre des RDBPs plus simples, où tous les paramètres et toutes les distributions sont fixés pour de bon.

Après un résultat intermédiaire (Bruss et Robertson (1991)), de vrais progrès ont pu commencer. Deux sociétés particulières ont rapidement émergé: la première, baptisée *société wf* (pour *weakest-first*), donne la priorité aux plus petites demandes de ressources, tant que les ressources sont en suffisance. Cette société peut être vue comme une forme extrême de communisme. Comme cette société minimise l'émigration, il semble qu'elle doive croître plus rapidement que n'importe quelle autre société. À l'inverse, une société qui donne la priorité aux plus grandes demandes de ressources (que nous avons nommée la *société sf*, pour *strongest-first*, modélisant une forme extrême de capitalisme) semble devoir croître moins vite que toute autre société. Curieusement, seulement la première de ces deux intuitions est correcte; la seconde est strictement fautive.

Malgré cela, de façon remarquable, Bruss et Duerinckx (2014) ont pu démontrer qu'une fois que la population a une taille suffisamment grande, alors la société wf a la plus grande probabilité de survie et la société sf a la

plus petite. Ces deux sociétés extrêmes forment ainsi bel et bien une *enveloppe* pour toutes les autres sociétés imaginables, de laquelle aucune société, quelle que soit sa politique, ne peut finalement s'échapper. Ce résultat est le Théorème de Bruss-Duerinckx sur l'enveloppement des sociétés.

Si les motivations et les forces conductrices des sociétés (comme les religions ou les idéologies) n'ont pas été mentionnées directement, c'est qu'elles n'interviennent qu'à travers la politique effective, c'est-à-dire la façon de distribuer les ressources aux individus, et à travers les différents paramètres intervenant dans les hypothèses (H1) et (H2), de sorte qu'il n'est aucun besoin dans notre modèle de s'interroger plus en détail sur les raisons et les motivations de la société.

Toutes les sociétés suivant les hypothèses (H1) et (H2) sont, *a priori*, sur un même pied d'égalité, et se trouvent sans ambiguïté à l'intérieur de l'enveloppe déterminée par les sociétés wf et sf. La société wf offre la plus grande probabilité de survie, mais le niveau de vie le plus bas. Les individus tenteront donc de s'en éloigner en raison de l'hypothèse (H2). La société sf, au contraire, fait tout pour l'hypothèse (H2) et le niveau de vie est le plus haut, mais l'émigration compromet alors dangereusement la survie de la société. L'enveloppe est donc à la fois attractive et répulsive, et aucune population ne peut désirer rester sur l'un des bords de l'enveloppe.

L'humanité a connu le capitalisme et le communisme, et nous pouvons donc dire qu'elle est déjà passée par les deux limites possibles. Avec toutes les sociétés différentes qui peuvent être imaginées, n'est-ce pas quelque peu surprenant?

Pas vraiment. La société wf est la plus attirante du point de vue de (H1), et la société sf est la plus attirante pour (H2). Or, dans des systèmes aléatoires complexes, les états attractifs ont typiquement une grande probabilité d'être approchés. Comme dans notre cas ces deux états sont chacun repoussant du point de vue de l'autre hypothèse, aucun des deux n'est absorbant, de sorte qu'il n'est surprenant que l'humanité les ait déjà approchés tous deux dans le passé.

À présent, pourquoi ce théorème d'enveloppement des sociétés est-il intéressant?

Le fait est que nous pouvons calculer *explicitement* les paramètres critiques de survie pour les sociétés wf et sf, de sorte que toute société satisfaisant (H1) et (H2) doit admettre ces paramètres critiques comme bornes inférieures et supérieures, respectivement, pour toute politique à long terme — que ce soit à Cuba, aux États-Unis, en Chine, ou ailleurs.

*

REFERENCES:

1. F. Thomas Bruss and James B. Robertson, "Wald's Lemma" for sums of order statistics of *i.i.d.* random variables, Adv. Appl. Prob., Vol 23, 612-623 (1991)
2. F. Thomas Bruss and Mitia Duerinckx, *Resource dependent branching processes and the envelope of societies*, à paraître dans Ann. of Appl. Prob., http://www.imstat.org/aap/future_papers.html (2014)
3. Bruss-Duerinckx Theorem (Wikipedia)
4. ResourceDependent Branching Processes (Wikipedia)

*



F. Thomas Bruss est Professeur de Mathématique à l'ULB, et Mitia Duerinckx est un étudiant en seconde année du Master en Mathématique à l'ULB.