PROBLEMATHS
19 novembre 2013

ÉNONCÉS

Problemath 7

Quels sont les entiers $n > 0$ pour lesquels $(2013 + \frac{1}{2})^n + (2014 + \frac{1}{2})^n$ est un entier?

Problemath 8

Etant donné un nombre fini de tas d'allumettes (contenant chacun un nombre fini d'allumettes), on choisit deux tas et (i) s'ils contiennent le même nombre d'allumettes, on les regroupe pour en faire un seul tas (ii) s'ils ne contiennent pas le même nombre d'allumettes, on enlève du plus gros autant d'allumettes qu'il y a dans le petit et on les ajoute au petit. Ainsi, à partir de trois tas contenant respectivement 15,6 et 3 allumettes, on peut, en appliquant les règles précédentes, se ramener à un seul tas en trois étapes :

$$15, 6, 3 \to 12, 6, 6 \to 12, 12 \to 24$$

Voici 4 situations de départ. Pour lesquelles est-il possible de se ramener à un seul tas en un nombre fini d'étapes?

(A) $17, 4, 5, 5, 1, 2, 3, 15, 12$
(B) $17, 4, 5, 5, 9$
(C) $51, 72, 57, 78, 78, 48$
(D) $1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 23$

Problemath 9

Etant donné un demi-disque C de diamètre $[a, b]$, on choisit un point x entre a et b, puis on construit (à l'intérieur de C) les demi-disques C_1 de diamètre $[a, x]$ et C_2 de diamètre $[x, b]$ et on trace la demi-droite D d'origine x tangente à C_1 et C_2. Dans le triangle curviligne ayant pour côtés les trois demi-cercles bordant C, C_1 et C_2, on construit le disque Γ_1 tangent à C, C_1, D et le disque Γ_2 tangent à C, C_2, D. Pour quels points $x \in]a, b[$ les disques Γ_1 et Γ_2 ont-ils la même aire?

Les solutions doivent nous parvenir au plus tard le **vendredi 13 décembre à 14h** (date limite à respecter impérativement!)

Solution du Problemath 4: L'aiguille des minutes tourne 12 fois plus vite que l'aiguille des heures. Par conséquent, si $x \in \{0, 1, 2, \ldots, 59\}$ est la subdivision sur laquelle se trouve l'aiguille des heures, celle sur laquelle se trouve l'aiguille des minutes vaut $12x \pmod{60}$. Le matin, les positions respectives des petite et grande aiguilles étaient $12x \pmod{60}$ et $x - 1 \pmod{60}$ et, à ce moment-là, la même relation que ci-dessus donne $12.12x \equiv x - 1 \pmod{60}$, c'est-à-dire $23x \equiv -1 \pmod{60}$. L'unique solution entière (mod60) de cette équation est $x = 13$. Emile avait donc regardé sa montre à 7h12 ce matin et il est actuellement 14h36.
Ont fourni une solution correcte : A. JORISSEN (élève de 3ème latin-math), D. GALANT (élève de 4ème à l'Athénée de La Louvière), P. BUSTILLO VAZQUEZ (élève de 5ème à l'Athénée Catteau), V. COUPLET (élève de 5ème à l'Institut Vallée Bailly à Braine l'Alleud), G. BALINT, N. MEYNAERT (BA1 maths), E. GRUWÉ, M. MOGADDAMFAR(BA1 polytech), D. LONGRÉE, C. MULLER, A. VANDENSCHRICK (BA2 maths), L. SCHOPEN (BA2 maths à Cambridge), J. CARTRY (BA2 ing. indust. à Arlon), C. DE GROOTE (MA2 maths), O. DECKERS, P. DE GROEN, A. JAECKEL, C. LARIVIERE, Y. SUPRIN (profs de maths), W. DE DONDER (ingénieur), P. BARBIER (software engineer à Seattle), V. I. ARNOLD (mathématicien russe) et DARK VADOR.

Solution du Problemath 5: Dans un repère orthonormé, soient $A = (0, 0, 0)$ $B = (b, 0, 0)$, $C = (0, c, 0)$

et $D = (0, 0, d)$(avec $b, c, d > 0$) les sommets du tétraèdre rectangle. Soit h la hauteur abaissée de D sur le côté BC dans le triangle BCD, et soit g la hauteur abaissée de A sur le côté BC dans le triangle ABC. Comme l'aire du triangle ABC vaut à la fois $bc/2$ et $g\sqrt{b^2+c^2}/2$, on en déduit que $g = bc/\sqrt{b^2+c^2}$ et donc $h^2 = g^2 + d^2 = b^2c^2/(b^2+c^2) + d^2$. Si α est l'aire de la face BCD, on a donc :

$$\begin{aligned}\alpha^2 = \left(\frac{|BC|h}{2}\right)^2 &= \frac{1}{4}(b^2+c^2)\left(\frac{b^2c^2}{b^2+c^2} + d^2\right) = \frac{1}{4}(b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2)\\ &= \left(\frac{1}{2}bc\right)^2 + \left(\frac{1}{2}bd\right)^2 + \left(\frac{1}{2}cd\right)^2\end{aligned}$$

L'affirmation de l'énoncé est donc vraie. Ce résultat est parfois appelé théorème de de Gua, en l'honneur du mathématicien et abbé français Jean-Paul de Gua de Malves (1713-1785). Il se généralise aisément comme suit en dimension supérieure : Si un $n-$ simplexe ("hypertétraèdre") de $\mathbb{R}^n$ est rectangle, c'est-à-dire s'il existe un sommet tel que toutes les arêtes issues de ce sommet soient perpendiculaires deux à deux, alors le carré du $(n-1)-$volume de la face ne contenant pas ce sommet est égal à la somme des carrés des $(n-1)-$volumes des autres faces.

Ont fourni une solution correcte : A. JORISSEN (élève de 3ème latin-math), D. GALANT (élève de 4ème à l'Athénée de La Louvière), P. BUSTILLO VAZQUEZ (élève de 5ème à l'Athénée Catteau),G. BALINT, N. MEYNAERT (BA1 maths), E. GRUWÉ, M. MOGADDAMFAR(BA1 polytech), D. LONGRÉE, X. MAUQUOY, C. MULLER, A. VANDENSCHRICK (BA2 maths), L. SCHOPEN (BA2 maths à Cambridge), J. CARTRY (BA2 ing. indust. à Arlon), C. DE GROOTE (MA2 maths), N. BAYEKULA (ancien étudiant en maths), O. DECKERS, P. DE GROEN, P. HEINEN, A. JAECKEL, C. LARIVIERE, Y. SUPRIN, H. VERMEIREN (profs de maths), W. DE DONDER, K. MADRANE (ingénieurs), P. BARBIER (software engineer à Seattle), P. MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe), V. I. ARNOLD (mathématicien russe) et DARK VADOR.

Solution du Problemath 6: L'équation donnée est équivalente à $\dfrac{1}{sin^6x.cos^2x} = \dfrac{256}{27}$. Si on pose $sin^2x = t$ et $cos^2x = 1 - t$, elle s'écrit $1/(t^3 - t^4) = \frac{256}{27}$, c'est-à-dire $256t^4 - 256t^3 + 27 = 0$. Comme $t = 3/4$ est une racine double de cette équation, elle peut aussi s'écrire

$$(4t-3)^2(16t^2+8t+3) = 0$$

Le deuxième facteur n'ayant pas de racine réelle, on est ramené à résoudre l'équation $4t-3 = 0$, d'où on déduit que $sinx = \pm\sqrt{3}/2$. En conclusion, les solutions réelles de l'équation de départ sont $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Ont fourni une solution correcte : P. BUSTILLO VAZQUEZ (élève de 5ème à l'Athénée Catteau), G. BALINT, N. MEYNAERT (BA1 maths), A. VANDENSCHRIK (BA2 maths), J. CARTRY (BA2 ing. indust. à Arlon), C. DE GROOTE, (MA2 maths), N. BAYEKULA (ancien étudiant en maths), O. DECKERS, P. DE GROEN, P. HEINEN, A. JAECKEL, C. LARIVIERE, Y. SUPRIN (profs de maths), W. DE DONDER, K. MADRANE (ingénieurs), P. BARBIER (software engineer à Seattle), P. MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe), V. I. ARNOLD (mathématicien russe) et DARK VADOR.

Les pensées du jour

"Aucune investigation humaine ne peut s'appeler vraie science si elle ne passe pas par les démonstrations mathématiques". (Léonard de Vinci)

"Le chemin le plus court d'un point à un autre est la ligne droite, à condition que les deux points soient bien l'un en face de l'autre". (Pierre Dac, humoriste français , 1893-1975)