PROBLEMATHS
19 octobre 2012

Problemath 4

Peut-on colorier chacun des points du plan euclidien en rouge ou en bleu de telle façon qu'aucun rectangle n'ait ses quatre sommets de la même couleur?

Problemath 5

Dans le plan euclidien, les distances d'un point p à trois des sommets d'un carré sont respectivement 1, 2 et 3. Quelle est la longueur d'un côté de ce carré?

Problemath 6

Que vaut $\sum_{k=1}^{2012} cos^2(\frac{k\pi}{2012})$?

Les solutions doivent nous parvenir au plus tard le vendredi 9 novembre à 14h (date limite à respecter impérativement!)

Solution du Problemath 1 Les centres des 4 boules sont les sommets d'un petit tétraèdre régulier dont les arêtes sont de longueur 2 et dont les faces sont à distance 1 de celles du grand tétraèdre initial. Désignons par L la longueur des arêtes du grand tétraèdre et par D (resp. d) la distance du centre de gravité du grand tétraèdre (resp. du petit tétraèdre) à une de ses faces. Comme $D = d + 1$ et comme les deux tétraèdres sont homothétiques, on a $\frac{L}{2} = \frac{D}{d} = \frac{d+1}{d}$, d'où on tire $L = 2 + \frac{2}{d}$. Il reste à calculer d.
Dans le tétraèdre T dont les arêtes sont de longueur 2, les hauteurs d'une face quelconque sont de longueur $\sqrt{3}$. Comme ces hauteurs se coupent aux 2/3 de chacune d'elles, la distance du centre d'une face à un sommet de cette face vaut $2\sqrt{3}/3$. Par le théorème de Pythagore, les hauteurs de T sont donc de longueur $2\sqrt{6}/3$. Ces hauteurs se coupant aux 3/4 de chacune d'elles, on en déduit que $d = \sqrt{6}/6$. Par conséquent, $L = 2 + 2\sqrt{6} = 6,898979...$
Saji MASSON et DARK VADOR ont considéré plus généralement, dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n (n \geq 2)$, $n+1$ boules de rayon 1 à l'intérieur d'un simplexe (hypertétraèdre) régulier, chaque boule étant tangente aux n autres et chaque face du simplexe étant tangente à n boules. Ils ont prouvé que les arêtes d'un tel simplexe sont de longueur $2 + \sqrt{2n(n+1)}$.
Ont fourni une solution correcte: C. MULLER (BA1 maths), L. MOUREAUX (BA1 physique), G. GLOUSSAROV, A. MIRI (BA1 polytech), N. DELPORTE (BA2 physique), C. DE GROOTE, F. THILMANY (MA1 maths), N. RADU (MA1 maths à l'UCL), P. DEGROEN (prof. à la VUB), O. DECKERS, C. LARIVIERE, S. MASSON, Y. SUPRIN, C. VAN HOOSTE, H. VERMEIREN (profs de maths), E. KRIECKHAUS (Department Chair, International School of Brussels), A. WAJNBERG (journaliste scientifique) et Dark Vador.

Solution du Problemath 2. Tout entier $n > 0$ admet un multiple entier dont l'écriture en système décimal comprend au moins une fois chacun des chiffres de 0 à 9. En effet, si l'écriture décimale de n comprend c chiffres, considérons les n entiers $1234567890.10^c + i$, où $i = 1, 2, \ldots, n$. Par construction, l'écriture décimale de chacun d'eux commence par les 10 chiffres $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0$ et, puisque ces n entiers sont consécutifs, l'un d'eux est forcément un multiple de n. Comme certains l'ont remarqué, il est facile

de généraliser le raisonnement précédent pour prouver que tout entier $n > 0$ admet une infinité de multiples entiers dont l'écriture en base $b \geq 2$ comprend au moins k fois chacun des chiffres $0, 1, \ldots, b-1$ (où k est un entier > 0 fixé arbitrairement).
Ont fourni une solution correcte: C. MULLER, A. VANDENSCHRIK (BA1 maths), J. REMY (BA2 maths à la VUB), C. DE GROOTE, F. THILMANY (MA1 maths), N. RADU (MA1 maths à l'UCL), O. DECKERS, C. LARIVIERE, S. MASSON, Y. SUPRIN, C. VAN HOOSTE (profs de maths), W. DE DONDER (ingénieur), Dark Vador, Hilbert's hotel owner et la Sorcière d'Agnesi.

Solution du Problemath 3. a) On vérifie facilement que l'application $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\alpha(x) = \begin{cases} x & si\ x \in \mathbb{Q} \\ x+1 & si\ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

est une permutation qui conserve toutes les distances rationnelles, mais pas toutes les distances car $d(\alpha(0), \alpha(\sqrt{2})) = d(0, \sqrt{2}+1) = \sqrt{2}+1 \neq \sqrt{2} = d(0, \sqrt{2})$
b) Dès que $n \geq 2$, toute permutation α des points de $\mathbb{R}^n$ conservant les distances rationnelles est une isométrie (c'est-à-dire conserve toutes les distances). En effet, procédons par l'absurde et supposons que α ne soit pas une isométrie. Alors il existe deux points x, y à distance d tels que α les transforme en deux points x', y' à distance $d' \neq d$. Si $d < d'$, il existe un rationnel q tel que $d < q < d'$ (car les rationnels sont denses dans $\mathbb{R}$). Comme $d(x, y) < q$, les sphères de rayon $\frac{q}{2}$ centrées en x et y ont une intersection non vide et il existe donc un point z tel que $d(x, z) = d(y, z) = \frac{q}{2} \in \mathbb{Q}$. Comme α conserve les distances rationnelles, $z' = \alpha(z)$ est tel que $d(x', z') = d(y', z') = \frac{q}{2}$. Par conséquent,

$$d(x', y') = d' > q = \frac{q}{2} + \frac{q}{2} = d(x', z') + d(z', y'),$$

ce qui contredit l'inégalité triangulaire.
Si $d' < d$, considérons la permutation réciproque α^{-1}. Celle-ci conserve les distances irrationnelles (sinon α transformerait une distance rationnelle en une irrationnelle, contrairement à l'hypothèse sur α). D'autre part, α^{-1} transforme les points x', y' à distance d' en les points x, y à distance d, avec $d' < d$. Grâce à la densité des irrationnels dans $\mathbb{R}$, il existe un irrationnel i tel que $d' < i < d$ et un argument analogue à celui du cas précédent permet à nouveau de contredire l'inégalité triangulaire.
Signalons que BECKMAN et QUARLES ("On isometries of euclidean spaces", Proc. Amer. Math. Soc. 4 (1953), 810-815) ont démontré que toute permutation α des points de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ conservant une distance $\delta > 0$ (c'est-à-dire telle que $d(a, b) = \delta$ entraîne $d(\alpha(a), \alpha(b)) = \delta$) est une isométrie de $\mathbb{R}^n$.
Ont fourni une solution correcte : C. DE GROOTE, F. THILMANY (MA1 maths), N. RADU (MA1 maths à l'UCL), S. MASSON, Y. SUPRIN, C. VAN HOOSTE (profs de maths) et la Sorcière d'Agnesi.

"Il est impossible d'être mathématicien sans avoir une âme de poète" (Sophie GERMAIN, mathématicienne française, 1776-1831).
"If I feel unhappy, I do mathematics to become happy. If I am happy, I do mathematics to keep happy" (Alfred RENYI, mathématicien hongrois, 1921-1970).