Défense de thèse publique
Ann Derlet

Promoteurs: D. Bonheure et J.-P. Gossez

Université Libre de Bruxelles

Le 20 mai 2011

Plan de l'exposé

- **Introduction**
- **Chapitres 1 à 3**
  - Modèles de dynamique des populations
  - Maximisation de la survie de l'espèce
- **Chapitre 4**
  - La courbure moyenne
  - Un problème à courbure moyenne prescrite

Introduction

Une équation est une égalité qui contient une (ou plusieurs) inconnues.

$$X + 2 = 4$$

Introduction

Une équation est une égalité qui contient une (ou plusieurs) inconnues.

$$X + 2 = 4 \qquad \Rightarrow \qquad X = 2$$

Introduction

Une équation est une égalité qui contient une (ou plusieurs) inconnues.

$$X + 2 = 4 \quad \Rightarrow \quad X = 2$$

$$X^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad X = 1 \text{ ou } X = -1$$

Une équation est une égalité qui contient une (ou plusieurs) inconnues.

$$\begin{aligned} X+2 &= 4 &\Rightarrow\quad & X=2 \\ X^2-1 &= 0 &\Rightarrow\quad & X=1 \text{ ou } X=-1 \\ 2^X &= 256 &\Rightarrow\quad & X=8 \end{aligned}$$

Introduction

Dans ma thèse, j'étudie des équations dont les inconnues sont **des fonctions**. On note

$$
\begin{aligned}
u &= \text{fonction inconnue, ``\underline{u}nknown''} \\
&= \text{vitesse, température, densité}\ldots \\
&= u(t, x, y, z, \ldots)
\end{aligned}
$$

Introduction

- ⚠ Une équation peut avoir 1 seule solution, plusieurs solutions, voire même une infinité de solutions, ou aucune solution

- ⚠ Le mathématicien fournit rarement la solution explicite d'une équation

- ⚠ Aujourd'hui, il y a de nombreuses équations pour lesquelles on ne connait pas la solution

www.claymath.org/millennium/Navier-Stokes_Equations/

Soit $u = u(t)$ la densité d'une population à un instant t

Soit $u = u(t)$ la densité d'une population à un instant t

Malthus (1798): $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \text{naissances} - \text{décès}$$

$$\text{naissances} = \alpha\, u, \qquad \text{décès} = \beta\, u$$

Modèles de dynamique des populations

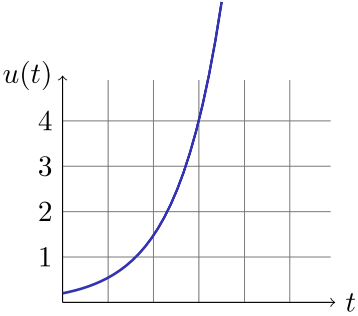
Soit $u = u(t)$ la densité d'une population à un instant t

Malthus (1798): $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \text{naissances} - \text{décès}$$

$$\text{naissances} = \alpha\, u, \qquad \text{décès} = \beta\, u$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = (\alpha - \beta)\, u = \lambda\, u \quad (\lambda \text{ est le taux de croissance})$$

Malthus (1798): $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \lambda\, u$$

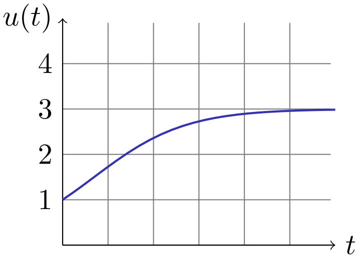


Solution: $u(t) = u_0\, \mathrm{e}^{\lambda t}$

Modèles de dynamique des populations

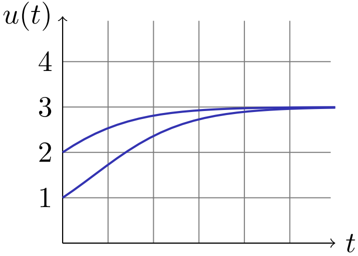
Verhulst (1836): $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \lambda \left(M - u\right) u$$

Verhulst (1836): $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \lambda\left(M - u\right)u$$



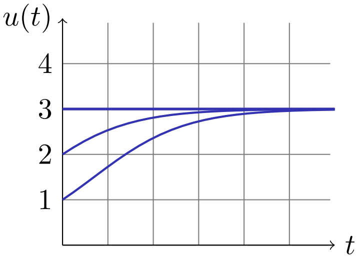
Solution: $$\frac{u_0 M\,\mathrm{e}^{\lambda M t}}{M + u_0\,(\mathrm{e}^{\lambda M t} - 1)}$$

Verhulst (1836): $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \lambda \left(M - u\right) u$$



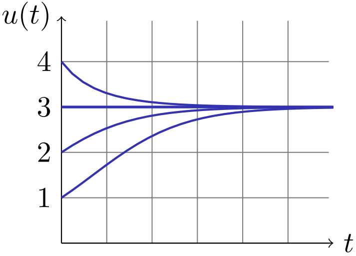
Solution: $$\frac{u_0 M \, \mathrm{e}^{\lambda M t}}{M + u_0 \left(\mathrm{e}^{\lambda M t} - 1\right)}$$

Verhulst (1836): $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \lambda\left(M-u\right)u$$



Solution: $$\frac{u_0 M\,\mathrm{e}^{\lambda M t}}{M + u_0\left(\mathrm{e}^{\lambda M t} - 1\right)}$$

Verhulst (1836): $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \lambda\left(M-u\right)u$$



Solution: $$\frac{u_0 M\, \mathrm{e}^{\lambda M t}}{M + u_0\left(\mathrm{e}^{\lambda M t} - 1\right)}$$

Fisher (1937): $$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{naissances} - \text{décès} + \textbf{migration}$$

Fisher (1937): $\dfrac{\partial u}{\partial t} =$ naissances $-$ décès $+$ **migration**

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \boldsymbol{\Delta u} + \lambda\, u\,\big(M - u\big) \quad \text{dans } (0,\infty)\times\Omega$$

$u = u(t,x)$ $-$ densité de la population

Ω $-$ son habitat, son domaine

$\boldsymbol{\Delta u} \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^{N} \partial_{x_i}^2 u$ $-$ la migration

Shigesada, Kawasaki, Teramoto (1986):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \lambda\, u \left(\boldsymbol{m(x)} - u \right) \quad \text{dans } (0,\infty) \times \Omega$$

$m = m(x)$ – ressources disponibles au point $x \in \Omega$

$\{x \in \Omega \, : \, m > 0\}$ – région favorable

$\{x \in \Omega \, : \, m < 0\}$ – région défavorable

Maximisation de la survie de l'espèce

On étudie la solution u de

$$(P) \quad \begin{cases} \partial_t u - \Delta u = \lambda\, u\left(m - u\right) & \text{dans } (0,\infty) \times \Omega \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sur } (0,\infty) \times \partial\Omega \\ u(0) = u_0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

Ω – un domaine borné de $\mathbb{R}^N$

$\lambda > 0$ – un paramètre

$m = m(x)$ – une fonction

Théorème : Soit $u = u(t, x)$ une solution positive de (P)

Maximisation de la survie de l'espèce

Théorème : Soit $u = u(t, x)$ une solution positive de (P)

- Si $\int_\Omega m \geqslant 0$

- Si $m \leqslant 0$

- Si $\int_\Omega m < 0$ et si m change de signe

Théorème : Soit $u = u(t,x)$ une solution positive de (P)

- Si $\int_\Omega m \geqslant 0$ alors $\boldsymbol{u(t,\cdot) \to \bar{u}}$ dans $L^r(\Omega)$ quand $t \to \infty$
  où $\bar{u} > 0$ est l'unique solution stationnaire de (P)
- Si $m \leqslant 0$
- Si $\int_\Omega m < 0$ et si m change de signe

Théorème : Soit $u = u(t,x)$ une solution positive de (P)

- Si $\int_\Omega m \geqslant 0$ alors $\boldsymbol{u(t,\cdot) \to \bar{u}}$ dans $L^r(\Omega)$ quand $t \to \infty$
  où $\bar{u} > 0$ est l'unique solution stationnaire de (P)
- Si $m \leqslant 0$ alors $\boldsymbol{u(t,\cdot) \to 0}$ dans $L^r(\Omega)$ quand $t \to \infty$
- Si $\int_\Omega m < 0$ et si m change de signe

Théorème : Soit $u = u(t,x)$ une solution positive de (P)

- Si $\int_\Omega m \geqslant 0$ alors $\boldsymbol{u(t,\cdot) \to \bar{u}}$ dans $L^r(\Omega)$ quand $t \to \infty$
  où $\bar{u} > 0$ est l'unique solution stationnaire de (P)
- Si $m \leqslant 0$ alors $\boldsymbol{u(t,\cdot) \to 0}$ dans $L^r(\Omega)$ quand $t \to \infty$
- Si $\int_\Omega m < 0$ et si m change de signe : **deux cas !**

Maximisation de la survie de l'espèce

Théorème : Soit $u = u(t,x)$ une solution positive de (P)

- Si $\int_\Omega m \geqslant 0$ alors $\boldsymbol{u(t,\cdot) \to \bar{u}}$ dans $L^r(\Omega)$ quand $t \to \infty$
  où $\bar{u} > 0$ est l'unique solution stationnaire de (P)
- Si $m \leqslant 0$ alors $\boldsymbol{u(t,\cdot) \to 0}$ dans $L^r(\Omega)$ quand $t \to \infty$
- Si $\int_\Omega m < 0$ et si m change de signe : **deux cas !**
  - Si $\lambda > \lambda_1$ alors $\boldsymbol{u(t,\cdot) \to \bar{u}}$ dans $L^r(\Omega)$
  - Si $\lambda \leqslant \lambda_1$ alors $\boldsymbol{u(t,\cdot) \to 0}$ dans $L^r(\Omega)$

Que vaut $\lambda_1 = \lambda_1(m)$?

Soit le problème

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta v & = & \mu\, m\, v & \text{dans } \Omega \\ \partial_\nu v & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Que vaut $\lambda_1 = \lambda_1(m)$?

Soit le problème

$$\begin{cases} -\Delta v &= \mu\, m\, v \quad \text{dans } \Omega \\ \partial_\nu v &= 0 \qquad\quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

S'il existe (v, μ) solution et si $v \not\equiv 0$ alors μ est une **valeur propre**

Si de plus $v \geqslant 0$ alors μ est une **valeur propre principale**.

Que vaut $\lambda_1 = \lambda_1(m)$?

Soit le problème

$$\begin{cases} -\Delta v = \mu\, m\, v & \text{dans } \Omega \\ \partial_\nu v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

S'il existe (v, μ) solution et si $v \not\equiv 0$ alors μ est une **valeur propre**

Si de plus $v \geqslant 0$ alors μ est une **valeur propre principale**.

$\rightarrow$ λ_1 est l'unique valeur propre principale $\neq 0$!

Maximisation de la survie de l'espèce

Théorème (rappel) :

Si $\int_\Omega m < 0$ et si m change de signe : **deux cas**

- Si $\lambda > \lambda_1(m)$ alors $\boldsymbol{u(t,\cdot) \to \bar{u}}$ dans $L^r(\Omega)$ **(survie)**
- Si $\lambda \leqslant \lambda_1(m)$ alors $\boldsymbol{u(t,\cdot) \to 0}$ dans $L^r(\Omega)$ **(extinction)**

Théorème (rappel) :

Si $\int_\Omega m < 0$ et si m change de signe : **deux cas**

- Si $\lambda > \lambda_1(m)$ alors $\boldsymbol{u(t,\cdot) \to \bar{u}}$ dans $L^r(\Omega)$ **(survie)**
- Si $\lambda \leqslant \lambda_1(m)$ alors $\boldsymbol{u(t,\cdot) \to 0}$ dans $L^r(\Omega)$ **(extinction)**

Question: Pour quelles fonctions m, le nombre $\lambda_1(m)$ est-t-il le plus petit ?

Définitions: Etant donnés a_1, a_2, $a_3 > 0$

$$\mathcal{M} \overset{\text{déf}}{=} \Big\{ m \in L^\infty(\Omega) : \int_\Omega m \leqslant -a_3, \; m \text{ change de signe} \\ \text{et } -a_1 \leqslant m(x) \leqslant a_2 \Big\}$$

Maximisation de la survie de l'espèce

Définitions: Etant donnés a_1, a_2, $a_3 > 0$

$$\mathcal{M} \overset{\text{déf}}{=} \Big\{ m \in L^\infty(\Omega) : \int_\Omega m \leqslant -a_3, \ m \text{ change de signe} \\ \text{et } -a_1 \leqslant m(x) \leqslant a_2 \Big\}$$

$$\lambda_{\min} \overset{\text{déf}}{=} \min \Big\{ \lambda_1(m) \ : \ m \in \mathcal{M} \Big\}$$

Problème: Trouver $m \in \mathcal{M}$ tel que $\lambda_1(m) = \lambda_{\min}$

Maximisation de la survie de l'espèce

Théorème (Propriété "bang-bang") :

Soit $m \in \mathcal{M}$ tel que $\lambda_1(m) = \lambda_{\min}$.

Théorème (Propriété "bang-bang") :

Soit $m \in \mathcal{M}$ tel que $\lambda_1(m) = \lambda_{\min}$. Alors il existe $D \subset \Omega$ tel que

$$m(x) = \begin{cases} a_2 & \text{si } x \in D \\ -a_1 & \text{si } x \in \Omega \setminus D \end{cases}$$

Théorème (Propriété "bang-bang") :

Soit $m \in \mathcal{M}$ tel que $\lambda_1(m) = \lambda_{\min}$. Alors il existe $D \subset \Omega$ tel que

$$m(x) = \begin{cases} a_2 & \text{si } x \in D \\ -a_1 & \text{si } x \in \Omega \setminus D \end{cases}$$

De plus, l'aire de D vaut $\frac{a_1|\Omega| - a_3}{a_1 + a_2}$

Théorème (Propriété "bang-bang") :

Soit $m \in \mathcal{M}$ tel que $\lambda_1(m) = \lambda_{\min}$. Alors il existe $D \subset \Omega$ tel que

$$m(x) = \begin{cases} a_2 & \text{si } x \in D \\ -a_1 & \text{si } x \in \Omega \setminus D \end{cases}$$

De plus, l'aire de D vaut $\frac{a_1|\Omega| - a_3}{a_1 + a_2}$ et

$$D = \{\varphi_1 > t\} \text{ pour un certain } t \geqslant 0$$

où $\varphi_1 > 0$ est une fonction propre associée à $\lambda_1(m)$

Théorème (Dimension 1) :

Supposons que $\Omega = (0, 1)$. Si $m \in \mathcal{M}$ est tel que $\lambda_1(m) = \lambda_{\min}$

Théorème (Dimension 1) :

Supposons que $\Omega = (0, 1)$. Si $m \in \mathcal{M}$ est tel que $\lambda_1(m) = \lambda_{\min}$

alors $m(x) = a_2$ si $x \in D$, $m(x) = -a_1$ si $x \in D^c$

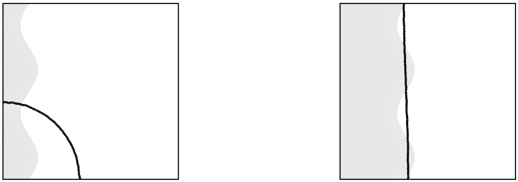
Théorème (Dimension 1) :

Supposons que $\Omega = (0,1)$. Si $m \in \mathcal{M}$ est tel que $\lambda_1(m) = \lambda_{\min}$

alors $m(x) = a_2$ si $x \in D$, $m(x) = -a_1$ si $x \in D^c$

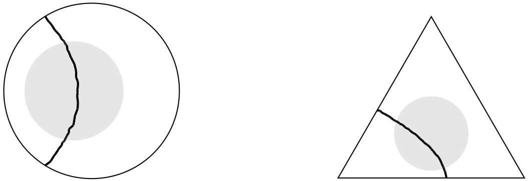
$$\text{et} \quad D = (0,a) \quad \text{ou} \quad D = (1-a,1)$$

Maximisation de la survie de l'espèce



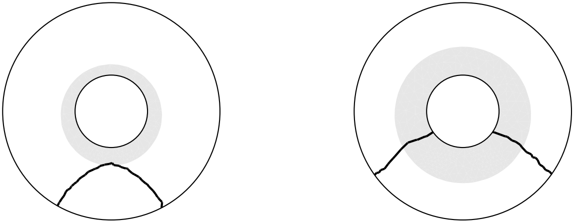
Ω = un carré

Maximisation de la survie de l'espèce



Ω = un disque ou un triangle

Maximisation de la survie de l'espèce



Ω = un anneau

Maximisation de la survie de l'espèce

Dans ma thèse, j'étudie

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta_p u = \lambda |u|^{p-2} u \left(m - |u|^q \right) & \text{dans } (0,\infty) \times \Omega \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sur } (0,\infty) \times \partial\Omega \\ u(0) = u_0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

Δ_p – le p-Laplacien : pour $1 < p < \infty$

$$\boldsymbol{\Delta_p u} \stackrel{\text{déf}}{=} \operatorname{div}\left(|\boldsymbol{\nabla u}|^{\boldsymbol{p-2}}\, \boldsymbol{\nabla u} \right)$$

Maximisation de la survie de l'espèce

Dans ma thèse, j'étudie

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta_p u = \lambda |u|^{p-2} u \left(m - |u|^q\right) & \text{dans } (0,\infty) \times \Omega \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sur } (0,\infty) \times \partial\Omega \\ u(0) = u_0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

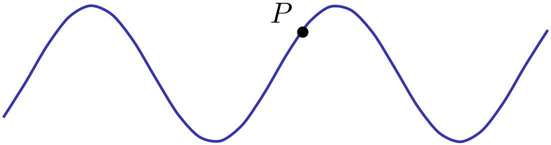
Δ_p – le p-Laplacien : pour $1 < p < \infty$

$$\boldsymbol{\Delta_p u} \overset{\text{déf}}{=} \operatorname{div}\left(|\boldsymbol{\nabla u}|^{\boldsymbol{p-2}} \boldsymbol{\nabla u}\right)$$

▸ CHAP 4

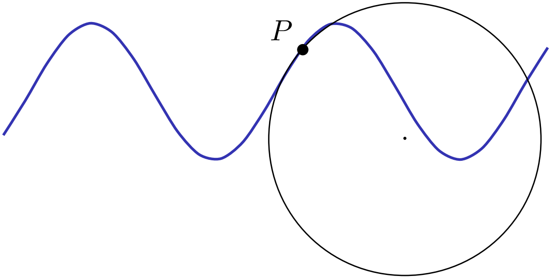
Soit C une courbe dans le plan et P un point de la courbe

Le **cercle osculateur** au point P est le cercle qui approxime le mieux la courbe au voisinage de P.



Soit C une courbe dans le plan et P un point de la courbe

Le **cercle osculateur** au point P est le cercle qui approxime le mieux la courbe au voisinage de P.



La courbure moyenne

La courbure κ de C au point P est définie par

$$\kappa = \begin{cases} 1/R & \text{si le cercle est au-dessus} \\ -1/R & \text{si le cercle est en-dessous} \end{cases}$$

où R est le rayon du cercle osculateur au point P

$\rightarrow$ http://demonstrations.wolfram.com

Un probleme à courbure moyenne prescrite

On considère

$$(P)\ \begin{cases} -\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = \lambda\,|u|^{p-2}u \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

u – la fonction inconnue

$\lambda > 0$ – un paramètre

$p \in (2, \frac{2N}{N-2})$ – un réel fixé

Un probleme à courbure moyenne prescrite

On considère

$$(P)\quad \begin{cases} -\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = \lambda\,|u|^{p-2}u \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

u – la fonction inconnue

$\lambda > 0$ – un paramètre

$p \in (2, \frac{2N}{N-2})$ – un réel fixé

$\to$ **Question:** Existe-t-il des solutions qui changent de signe?

RÉFÉRENCES

Théorème (Existence) :

Il existe $\lambda^* > 0$ tel que $\lambda \geqslant \lambda^* \Rightarrow$

(P) a au moins une **solution qui change de signe une fois**.

Théorème (Existence) :

Il existe $\lambda^* > 0$ tel que $\lambda \geqslant \lambda^* \;\Rightarrow$

(P) a au moins une **solution qui change de signe une fois**.

Théorème (Multiplicité) :

Pour tout naturel k, il existe $\overline{\lambda} = \overline{\lambda}(k)$ tel que $\lambda \geqslant \overline{\lambda} \;\Rightarrow$

(P) a au moins $\mathbf{2k}$ **solutions qui changent de signe**.

Théorème (Perte de symétrie) :

Supposons que $\boldsymbol{\Omega}$ = **boule**. Si λ est grand alors

(P) a une solution qui change de signe et qui **n'est pas radiale**.

De plus, (P) a au moins 2 solutions changeant de signe une fois.

Références

- A. Derlet, J.-P. Gossez, P. Takáč, Minimization of eigenvalues for a quasilinear elliptic Neumann problem with indefinite weight, J. Math. Anal. Appl. **371** (2010), no. 1, 69–79
- D. Bonheure, A. Derlet, S. de Valeriola, Nodal and multiple solutions for a prescribed mean curvature problem, preprint
- A. Derlet, *Eigenvalues of the p-Laplacian in population dynamics and nodal solutions of a prescribed mean curvature problem*, Thèse de doctorat, ULB, 2011

Références

- A. Derlet, J.-P. Gossez, P. Takáč, Minimization of eigenvalues for a quasilinear elliptic Neumann problem with indefinite weight, J. Math. Anal. Appl. **371** (2010), no. 1, 69–79
- D. Bonheure, A. Derlet, S. de Valeriola, Nodal and multiple solutions for a prescribed mean curvature problem, preprint
- A. Derlet, *Eigenvalues of the p-Laplacian in population dynamics and nodal solutions of a prescribed mean curvature problem*, Thèse de doctorat, ULB, 2011

— FIN —